Η εξερεύνηση των μαθηματικών στον κόσμο

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

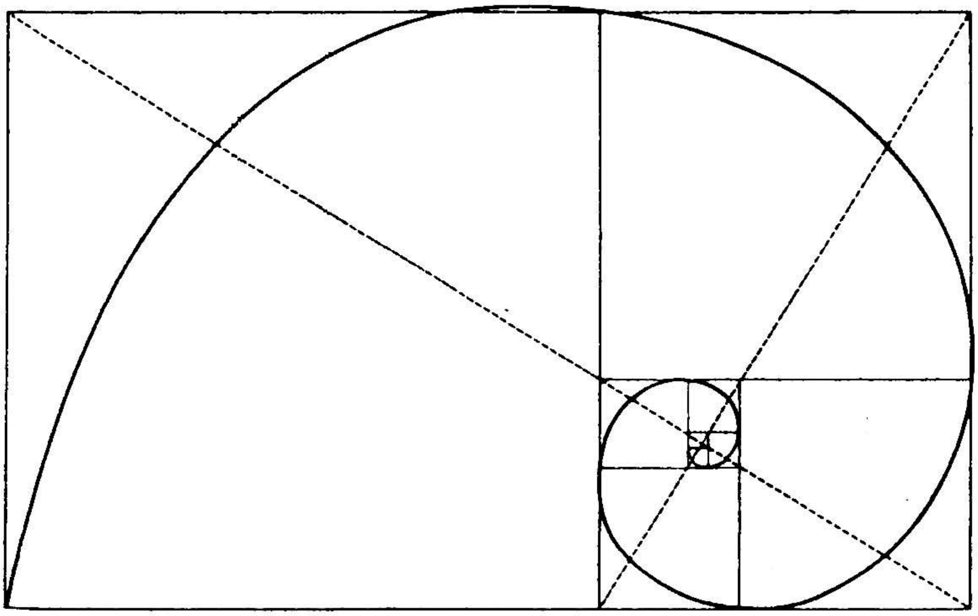
ΓΥΜΝΑΣΙΟ, ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2012-2013

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΟ "ΤΟ ΠΑΓΚΡΗΤΙΟΝ"

ΑΓ. ΙΩΑΝΝΗΣ - 714 09 ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

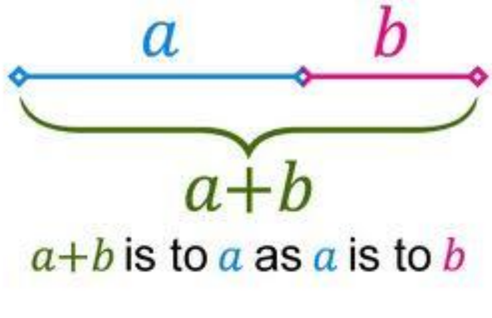
Στην εργασία αυτή συμμετείχαν οι μαθήτριες της γ΄ γυμνασίου: Βασιλάκη Μίρκα, Βρέντζου Ζαχαρένια, Κληρονόμου Ευγενία, Παναγιωτάκη Μαριλιάνα και Σμαραγδάκη Ηρώ. Την επιμέλεια είχε ο μαθηματικός Παυλάκος Περικλής.

Περιεχόμενα



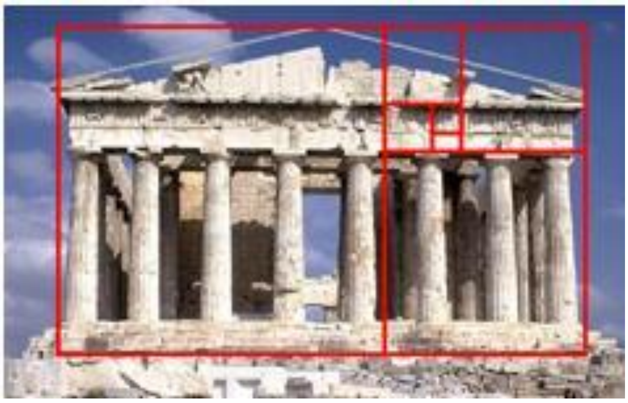
1^{ο} ταξίδι: η χρυσή τομή

Η χρυσή τομή δίνει το σημείο που πρέπει να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα, ώστε ο λόγος του ως προς το μεγαλύτερο τμήμα να ισούται με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος ως προς το μικρότερο, δηλαδή (α + β) / α = φ που ισούται περίπου με 1,618. Θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες και για το λόγο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική, τόσο κατά την αρχαία Ελλάδα όσο και κατά την Αναγέννηση. Την χρυσή τομή εισήγαγε και υπολόγισε ο Πυθαγόρας, ο οποίος ήταν ο πρώτος που παρατήρησε ότι τα φυτά και τα ζώα δεν μεγαλώνουν τυχαία, αλλά σύμφωνα με ακριβείς μαθηματικούς κανόνες. Δεν είναι τυχαία δηλαδή τα όμορφα σχέδια των λουλουδιών.



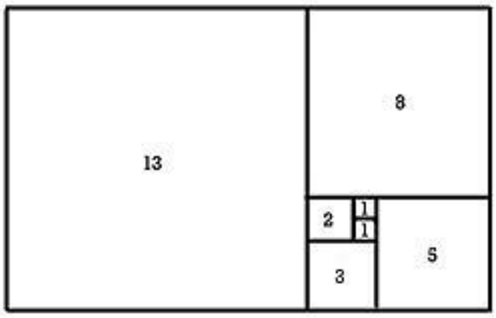
Ο αριθμός φ ισούται με $(1+\sqrt{5})/2$ και είναι η θετική λύση της εξίσωσης : $φ^2+φ-1=0$, που προκύπτει αν θέσουμε α=φ και α+β=1 στον αρχικό ορισμό.

Πέρα όμως από τη διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων, η Χρυσή Τομή παίζει σημαντικό ρόλο στην αισθητική των επιφανειών. Για παράδειγμα, αν παρουσιάσετε σε μια ομάδα ανθρώπων ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διάφορες αναλογίες πλευρών, οι περισσότεροι επιλέγουν ως «αρμονικότερο» αυτό του οποίου οι πλευρές έχουν λόγο ίσο με τη Χρυσή Τομή. Η τάση αυτή ήταν ήδη γνωστή στους αρχιτέκτονες της αρχαίας Ελλάδας, όπως δείχνει το γεγονός ότι η βάση και το ύψος της πρόσοψης του Παρθενώνα, αν συνυπολογίσει κανείς και το τμήμα του αετώματος που λείπει, έχουν λόγο ίσο με τη Χρυσή Τομή. Η χρυσή τομή συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα φ, το αρχικό του ονόματος του Φειδία, δημιουργός των γλυπτών του Παρθενώνα (Χαρακτηριστικό παράδειγμα Αρχιτεκτονικής όπου συναντάται ο λόγος χρυσής τομής στις αναλογίες των πλευρών του.). Επίσης συναντάμε την χρυσή τομή από την πυραμίδα του Χέοπα και της Γκίζας στην αρχαία Αίγυπτο μέχρι στις μεσαιωνικές εξωτερικές διαρρυθμίσεις την κτιρίων.



Αν πάρουμε ένα ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές, αν διαιρεθούν, μας δίνουν τον αριθμό φ (για παράδειγμα, ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 13 x 8), αυτό το ορθογώνιο ονομάζεται "χρυσό ορθογώνιο". Αυτό έχει την εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα: Αν σχεδιάσουμε ένα νέο ορθογώνιο με μήκος το άθροισμα των διαστάσεων του ορθογωνίου που έχουμε, το καινούργιο ορθογώνιο είναι και αυτό χρυσό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση (13 x 8), το νέο ορθογώνιο έχει διαστάσεις (13 + 8 =)21 x 13.

Επίσης:
Αν ξεκινήσουμε με ένα τετράγωνο (1 x 1) και αρχίσουμε να περιστρέφουμε τις πλευρές για να φτιάξουμε ορθογώνια, όπως φαίνεται στην δίπλα εικόνα:



καταλήγουμε σε χρυσά ορθογώνια.

Ένα παράδειγμα, για να κατανοήσουμε καλύτερα τη φύση του αριθμού, είναι η ακολουθία Fibonacci, όπου από έναν δοσμένο αριθμό, κάθε καινούργιος αριθμός αποτελεί το άθροισμα των δύο προηγούμενων. Ας πάρουμε μια βασική ακολουθία Fibonacci: 1-1-2-3-5-8-3-21-34-55-89-144...

Αν υπολογίσουμε το λόγο ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο διαδοχικούς αριθμούς της ακολουθίας:

1 + 1 = 2	
1 + 2 = 3	3 / 2 = 1.5
2 + 3 = 5	5 / 3 = 1.66
3 + 5 = 8	8 / 5 = 1.6
5 + 8 = 13	13 / 8 = 1.62

8 + 13 = 21	21 / 13 = 1.615
13 + 21 = 34	34 / 21 = 1.619
21 + 34 = 55	55 / 34 = 1.617
34 + 55 = 89	89 / 55 = 1.618
55 + 89 = 144	144 / 89 = 1.6179
89 + 144 = 233	233 / 144 = 1.61805
144 + 233 = 377	377 / 233 = 1.618025
233 + 377 = 610	610 / 377 = 1.618037
377 + 610 = 987	987 / 610 = 1.618032
610 + 987 = 1597	1597 / 987 = 1.6180344
987 + 1597 = 2584	2584 / 1597 = 1.6180338
1597 + 2584 = 4181	4181 / 2584 = 1.6180340
2584 + 4181 = 6765	6765 / 4181 = 1.61803396
4181 + 6765 = 10946	10946 / 6765 = 1.61803399
6765 + 10946 = 17711	17711 / 10946 = 1.618033985
10946 + 17711 = 28657 κλπ.	28657 / 17711 = 1.6180339901 κλπ.

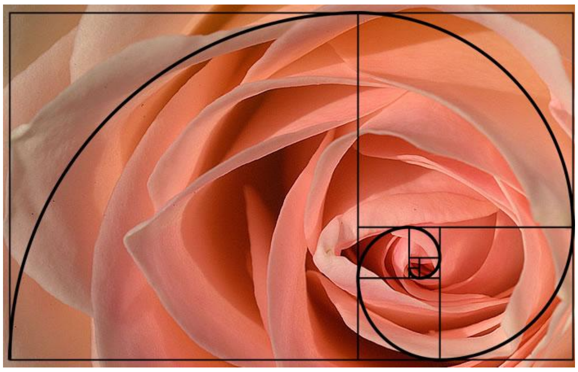
Συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός στον οποίο τείνει να καταλήξει αυτός ο λόγος είναι το φ. Πάρτε για παράδειγμα το λόγο 34/21. Το πηλίκο διαφέρει από το φ μόνο κατά 0,001 περίπου.
Τελικά μια αρκετά καλή προσέγγιση του φ είναι η:
1.61803398874989484820458683436564...

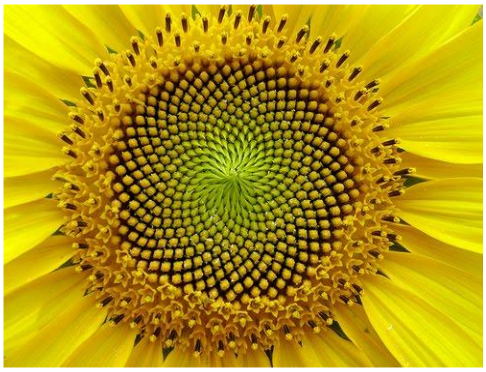
Ο ΠΙΟ ΑΡΡΗΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΡΡΗΤΟΥΣ

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν χρησιμοποιούσαν άρρητους αριθμούς. Γι’ αυτό και το Πυθαγόρειο Θεώρημα αποτελεί σταθμό στη μαθηματική σκέψη. Ονόμαζαν λοιπόν τους ρητούς αριθμούς σύμμετρα μεγέθη, ενώ τους άρρητους όταν πλέον τους αποδεχθήκαν τους ονόμασαν ασύμμετρα μεγέθη. Υπάρχει όμως ένα θεώρημα της θεωρίας αριθμών, αυτό του Hurwitz, που εξηγεί πόσο «καλά» μπορούν οι ρητοί να προσεγγίσουν έναν άρρητο. Και εκεί υπάρχει ένας περιορισμός: η συγκεκριμένη προσέγγιση δεν μπορεί να γίνει καλύτερη για τον αριθμό φ. Με άλλα λόγια, ο αριθμός φ προσεγγίζεται κατά το χειρότερο τρόπο από του ρητούς, είναι δηλαδή « ο πιο άρρητος από τους άρρητους»!

Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΣΤΗ ΦΥΣΗ ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟ ΣΩΜΑ

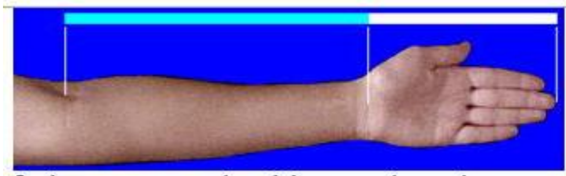
Οι αρχαίοι Έλληνες βρήκαν ότι τα σχέδια των λουλουδιών βασίζονται σε γεωμετρική αναλογία. Εμφανίζεται ακόμα και στην ανάπτυξη των βελόνων αρκετών ειδών ελάτου, καθώς επίσης και στη διάταξη των πετάλων στις μαργαρίτες και τα ηλιοτρόπια. Μερικά κωνοφόρα δένδρα παρουσιάζουν τη σειρά αριθμών στη δομή της επιφάνειας των κορμών τους, ενώ τα φοινικόδεντρα στους δακτυλίους των κορμών τους



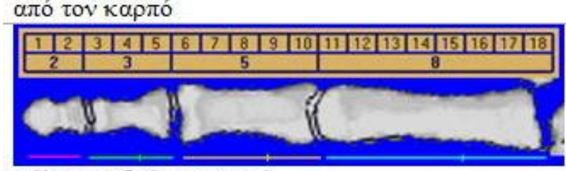


Οι σπείρες στα ανθύλλια των λουλουδιών και στα σαλιγκάρια, είναι χρυσές σπείρες στις περισσότερες περιπτώσεις. Αυτό συμβαίνει γιατί τα πάντα αυξάνονται με έναν αριθμό ίσο με Φ. Στο σώμα εντόμων, ζώων αλλά και σε πολλά λουλούδια, μπορούμε να διακρίνουμε λόγους χρυσής τομής..

Παρατηρώντας λεπτομερέστερα σημεία του ανθρώπινου σώματος, διακρίνουμε και άλλες διαιρέσεις σε χρυσό λόγο. Για παράδειγμα ο καρπός διαιρεί το χέρι από τον αγκώνα και κάτω, σε λόγο χρυσής τομής, ενώ αν παρατηρήσουμε τις φάλαγγες του δείκτη μας, φαίνεται πως καθεμιά βρίσκεται σε χρυσή αναλογία με την επόμενή της. Επίσης η χρυσή αναλογία εμφανίζεται στις αναλογίες των δοντιών μας, του αυτιού μας αλλά και σε πολλές άλλες λεπτομέρειες του προσώπου μας όπως είναι τα χείλη, τα ματιά η ακόμα και η μύτη.

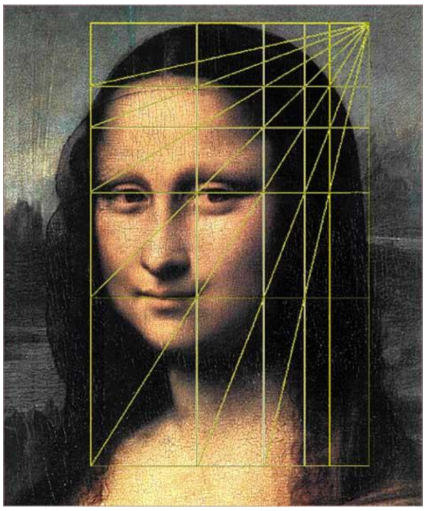


διαίρεση του χεριού σε λόγο χρυσής τομής από τον καρπό



φάλαγγες δείκτη χεριού

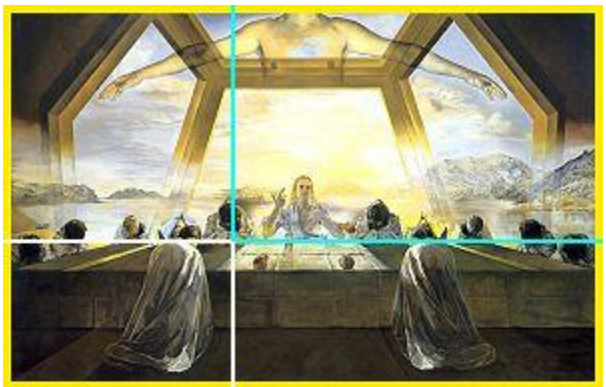
Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΣΤΗ ΖΩΓΡΑΦΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗ ΓΛΥΠΤΙΚΗ



Την αναγέννηση οι καλλιτέχνες άρχισαν να επιστρέφουν στα κλασικά θέματα της αρχαιότητας για τις εμπνεύσεις τους και τις τεχνικές τους.Ο Leonardo Da Vinci ζωγράφισε το πρόσωπο της Mona Lisa ώστε να χωράει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο και δόμησε τον υπόλοιπο πίνακα γύρω από το πρόσωπο χωρίζοντάς τον επίσης σε χρυσά ορθογώνια. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να αναφέρουμε τους Michelangelo (1475- 1564) και Raphael (1483-1530) οι οποίοι επανέφεραν στις συνθέσεις τους την χρυσή τομή.

Ο ομφαλός διαιρεί το σώμα του Δαβίδ του Michelangelo σε λόγο χρυσής τομής. Η πιο πρόσφατη αναζήτηση για μια «γραμματική» στην τέχνη οδήγησε μοιραία τους σύγχρονους καλλιτέχνες στην χρήση της χρυσής τομής.

Η «παρέλαση» του Γάλλου νέο-ιμπρεσιονιστή καλλιτέχνη Seurat (1859- 1891), που χαρακτηρίζεται από το γνωστό του στυλ με τις άπειρες κουκκίδες, περιέχει πλήθος παραδειγμάτων χρυσών αναλογιών. Σύμφωνα με ένα εμπειρογνώμονα τέχνης, ο Seurat «επιτέθηκε σε κάθε καμβά του με τη χρυσή αναλογία».



Τα χρυσά ορθογώνια είναι πολύ εμφανή στους Λουόμενούς του. Ο Μυστικός Δείπνος του Salvador Dali (1904-1989) πλαισιώνεται από ένα χρυσό ορθογώνιο. Χρυσοί λόγοι χρησιμοποιηθήκαν για να καθορίσουν τη θέση κάθε φιγούρας, ενώ ο θόλος του δωματίου σχηματίζεται από τις έδρες κανονικού δωδεκάεδρου που όπως είδαμε είναι ένα από τα στερεά που συνδέεται άμεσα με τη χρυσή τομή.

Αν οι άνθρωποι επιλέγουν τη Χρυσή Τομή για αισθητικούς λόγους, τι μπορούμε να πούμε για τη φύση, που επιλέγει τη λογαριθμική σπείρα για να «κατασκευάσει» μια πληθώρα από δομές; Οι επιστήμονες έχουν διαπιστώσει με έκπληξη ότι η λογαριθμική σπείρα εμφανίζεται σε σχήματα φυσικών αντικειμένων με εντελώς διαφορετικές ιδιότητες. Στη μικρότερη κλίμακα εμφανίζεται στα όστρακα πολλών θαλάσσιων οργανισμών, όπως για παράδειγμα είναι ο ναυτίλος. Στην ενδιάμεση κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των κυκλώνων, όπως αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στις φωτογραφίες των μετεωρολογικών δορυφόρων. Τέλος στη μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα εμφανίζεται στο σχήμα των σπειροειδών γαλαξιών, τεράστιων σχηματισμών από εκατοντάδες δισεκατομμύρια αστέρια, τους οποίους μπορούμε να απολαύσουμε στις φωτογραφίες των σύγχρονων τηλεσκοπίων.

(21) triangle system I A_3 type I Ukkel V-'38

2^{ο} ταξίδι: πλακοστρώσεις

Πολύς κόσμος διασκεδάζει τον ελεύθερό του χρόνο με την κατασκευή ενός puzzle. Τα διάφορα κομματάκια θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν όλα και να ενωθούν αρμονικά για να συνθέσουν ένα όμορφο σχέδιο. Πολύ απλοϊκά θα λέγαμε ότι οι πλακοστρώσεις είναι ένα παρόμοιο παιχνίδι: μας δίνουν διάφορα επίπεδα σχήματα που θα πρέπει να τα ενώσουμε ώστε να καλύψουμε μια επιφάνεια. Τρείς είναι οι περιορισμοί:

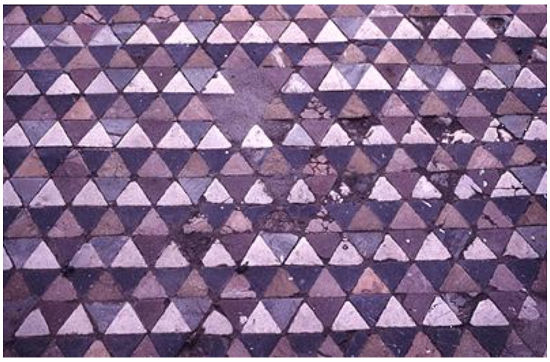
1. Τα κομματάκια να μην αλληλεπικαλύπτονται τμηματικά
2. Να μην αφήνουμε κενά
3. Να μην μεταβάλουμε το μέγεθός τους

Οτιδήποτε άλλο επιτρέπεται: μπορούμε να περιστρέψουμε τα κομματάκια, να τα μεταφέρουμε σε άλλες θέσεις που ίσως προτιμάμε και να χρησιμοποιήσουμε όσα αντίγραφά τους θέλουμε.
Τα επίπεδα σχήματα που θα μας δώσουν, μπορεί να είναι γεωμετρικά πολύγωνα, κυρτά ή μη κυρτά, μπορεί και όχι. Πολλοί καλλιτέχνες έχουν επιτύχει υψηλά αισθητικά αποτελέσματα στα έργα τους, κάνοντας πλακοστρώσεις με διάφορες φιγούρες. Ίσως ο σημαντικότερος εκπρόσωπος αυτών των εφαρμογών είναι ο M. Escher, ο οποίος στις πλακοστρώσεις του, έχει χρησιμοποιήσει ψάρια, άλογα, μονόκερους, ερπετά και άλλες πρωτότυπες φιγούρες.

Σ’ αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με πλακοστρώσεις με πολύγωνα. Νομίζουμε ότι παρουσιάζουν ενδιαφέρον αφού αρκετά συχνά τις συναντάμε στη φύση. Για παράδειγμα, φυσικές πλακοστρώσεις αποτελούν οι κηρύθρες των μελισσών, οι τοποθέτηση των σπορίων στο άνθος του καλαμποκιού, η φολιδώσεις στα δέρματα των ζώων και πολλά άλλα. Από τις πολλές εφαρμογές των πλακοστρώσεων στη φύση, θα σταθούμε ιδιαίτερα στους κρυστάλλους και ημικρυστάλλους και θα εξηγήσουμε τι σχέση έχει η δομή των δεύτερων με τις πλακοστρώσεις Penrose. Εκεί θα αναφέρουμε και μία από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις της σύγχρονης τεχνολογίας για τους ημικρυστάλλους που κυριολεκτικά έφερε επανάσταση στην αντίληψη που είχαμε για τους κρυστάλλους.

Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία πως τα πολύγωνα είναι κλειστές τεθλασμένες γραμμές που ορίζουν μια κυρτή πολυγωνική επιφάνεια (δηλαδή είναι μονοδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα). Εμείς εδώ για απλότητα, όταν θα λέμε πολύγωνο, θα εννοούμε κυρτές πολυγωνικές επιφάνειες που είναι δισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα .
Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, οι πλακοστρώσεις είναι ένα γεωμετρικό παιχνίδι με τους παραπάνω τρεις περιορισμούς. Στις πλακοστρώσεις με πολύγωνα προστίθεται και ένας τέταρτος: *Τα κομματάκια που χρησιμοποιούμε είναι κυρτά πολύγωνα*. Το πρόβλημα λοιπόν είναι να «γεμίσουμε» το επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις, με τα πλακάκια – κομματάκια που μας δίνονται. Θα δούμε ότι αυτό δεν είναι πάντα εφικτό.

Για να μελετήσουμε καλύτερα τις πλακοστρώσεις με πολύγωνα, τις διακρίνουμε καταρχήν στις ακόλουθες δύο κατηγορίες:
Απλές είναι οι πλακοστρώσεις, όπου χρησιμοποιούμε μόνο ένα πολύγωνο (και αντίγραφά του). Μια τέτοια πλακόστρωση φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



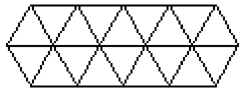
Πομπηία: Πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα.

Τα πράγματα με τις απλές πλακοστρώσεις είναι ιδιαίτερα περιοριστικά. Γι’ αυτό και υπάρχουν μόνο τρία είδη:

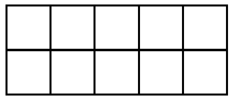
1. Πλακοστρώσεις με τρίγωνα
2. Πλακοστρώσεις με παραλληλόγραμμα
3. Πλακοστρώσεις με εξάγωνα.

Για να καταλάβουμε το γιατί υπάρχουν μόνο αυτά τα είδη, ας υποθέσουμε ότι το πολύγωνο που έχουμε στη διάθεσή μας είναι κανονικό (δηλαδή έχει όλες τις πλευρές του και όλες τις γωνίες του ίσες). Αυτό δεν είναι τόσο περιοριστικό, αν σκεφτούμε ότι κάθε άλλη απλή πλακόστρωση είναι απλώς μία «παραμόρφωση» πλακοστρώσεων με κανονικά πολύγωνα. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι τα κομμάτια ενώνονται πλευρά με πλευρά και επομένως υπάρχουν κάποια σημεία «κόμβοι» που ενώνονται οι κορυφές. (Τέτοιες πλακοστρώσεις λέγονται κανονικές).

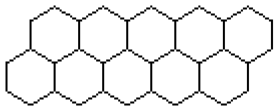
Πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα

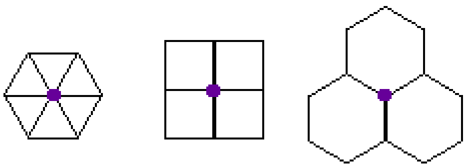


Πλακόστρωση με τετράγωνα



Πλακόστρωση με κανονικά εξάγωνα





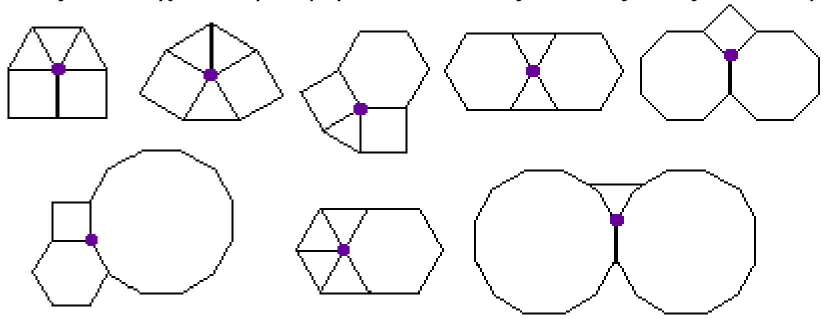
Σε ένα τέτοιο σημείο – κόμβο θα πρέπει οι γωνίες που ενώνονται να αθροίζονται ακριβώς σε 360^o. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με 6 ισόπλευρα τρίγωνα, αφού η γωνία του καθενός είναι 60^o και $6\times60 = 360$ ή $360:60 = 6$. Όμοια, αφού η γωνία κάθε τετραγώνου είναι 90^o και $360: 90 = 4$, μπορούν να ενώσουν τις κορυφές τους 4 τετράγωνα σε ένα κόμβο. Για τα κανονικά πεντάγωνα όμως που η γωνία τους είναι 108^o και δεν είναι τέλεια η διαίρεση 360:108, δεν μπορούμε να έχουμε απλή πλακόστρωση. Πάρετε και εσείς πεντάγωνα και πειραματιστείτε: Τρία πεντάγωνα ενωμένα στις κορυφές αφήνουν πολύ χώρο ακάλυπτο, ενώ με τέσσερα πεντάγωνα έχουμε επικαλύψεις. Με τα εξάγωνα δεν έχουμε πρόβλημα, αλλά με τα υπόλοιπα κανονικά πολύγωνα έχουμε το ίδιο πρόβλημα με τα πεντάγωνα.

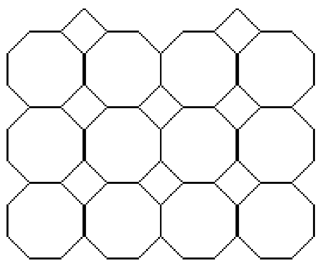
Το βιβλίο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου περιέχει ότι χρειάζεστε. Δείτε παράγραφο 11.1, σελίδα 233 και την άσκηση: σύνθετα 1 σελ. 237. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η άσκηση εμπέδωσης 7 (πεντάγωνο και χρυσή τομή) και η άσκηση αποδεικτική 1 (κανονικά πολύγωνα και αριθμοί).

.

Ας ολοκληρώσουμε αυτή την παράγραφο εξηγώντας *γιατί οι μέλισσες κατασκευάζουν εξαγωνικά κελιά* στις κηρύθρες τους: Είδαμε ότι μόνο τρία σχήματα θα μπορούσαν να επιλέξουν οι μέλισσες για να κατασκευάσουν τα κελιά τους ώστε να πλακοστρώσουν μία επιφάνεια. Ποιο όμως από τα τρία έχει τα περισσότερα πλεονεκτήματα; Με λίγη γεωμετρία Γυμνασίου βλέπουμε ότι το καλύτερο είναι το κανονικό εξάγωνο γιατί από τα τρία σχήματα είναι αυτό που έχει την μεγαλύτερη επιφάνεια σε σχέση με την περίμετρό του. Αν δηλαδή πάρουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο, και ένα κανονικό εξάγωνο το καθένα με περίμετρο 1cm, τότε το κανονικό εξάγωνο είναι αυτό που έχει την μεγαλύτερη επιφάνεια. Κατασκευάζοντας λοιπόν οι μέλισσες εξαγωνικά κελιά, με σχετικά μικρή ποσότητα κεριού εξασφαλίζουν μεγάλο χώρο για το μέλι τους. Είναι λοιπόν πολύ σοφές οι κυρίες μέλισσες!

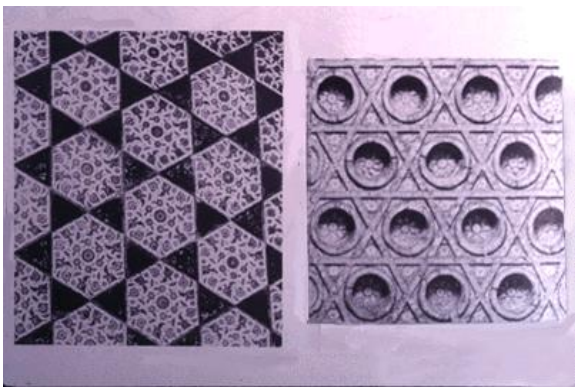
Μικτές λέγονται οι πλακοστρώσεις που παράγονται από περισσότερα από ένα είδος κυρτών πολυγώνων. Σίγουρα παρουσιάζουν μεγαλύτερη ποικιλία μορφών από τις απλές και έχουν προτιμηθεί ανά τους αιώνες στις διακοσμήσεις κτηρίων. Δύο





Παραδείγματα μικτών πλακοστρώσεων

Παραδείγματα φαίνονται στις ακόλουθες εικόνες και σχεδιαγράμματα.



Ισλαμικό σχέδιο με μικτές εξαγωνικές – τριγωνικές πλακοστρώσεις.

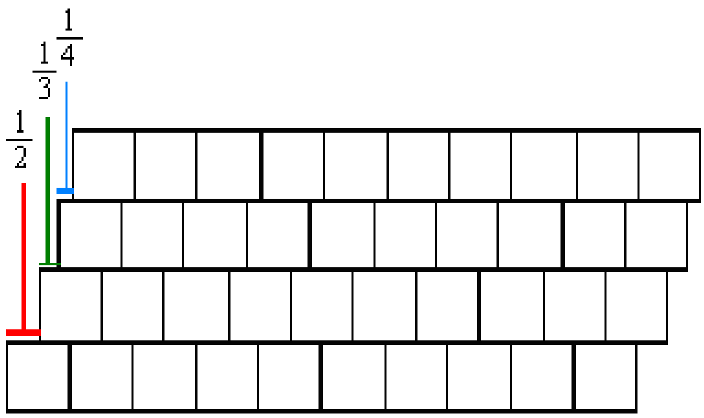
Θα προχωρήσουμε και σε έναν δεύτερο διαχωρισμό των πλακοστρώσεων, σε περιοδικές και μη περιοδικές.

Περιοδικές λέγονται οι πλακοστρώσεις που επαναλαμβάνονται. Μπορούν δηλαδή να μετακινηθούν κατάλληλα και να ταυτιστούν με την αρχική τους θέση. Όλες οι πλακοστρώσεις που εκθέσαμε παραπάνω, είναι περιοδικές. Έτσι μία πλακόστρωση τετραγώνων ενωμένα πλευρά με πλευρά είναι περιοδική, αφού αν την μετακινήσουμε κατά μία πλευρά δεξιά ή αριστερά η εικόνα της δεν θα αλλάξει. Τα σημεία της που ήταν κόμβοι, θα παραμείνουν κόμβοι και στη νέα πλακόστρωση.

Μη περιοδικές λέγονται οι πλακοστρώσεις που δεν είναι περιοδικές. Όσο δηλαδή και να τις μετατοπίζουμε δεν μπορούν να επανέλθουν στην αρχική τους θέση. Υπάρχουν όμως μη περιοδικές πλακοστρώσεις; Τα παραδείγματα μας δεν ήταν τέτοια. Είναι ανάγκη λοιπόν να δώσουμε ένα παράδειγμα μη περιοδικής πλακόστρωσης και θα δώσουμε φυσικά το πιο απλό:

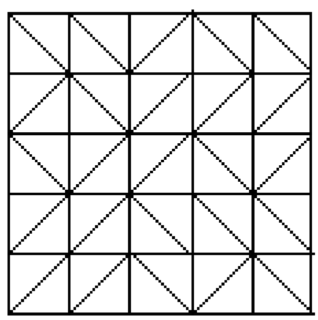
Ας πάρουμε την πλακόστρωση τετραγώνων που ενώνονται πλευρά με πλευρά και ας επιχειρήσουμε να της «χαλάσουμε» την περιοδικότητά της, μετακινώντας λίγο κάθε οριζόντια σειρά τετραγώνων.

Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι η πλευρά των τετραγώνων έχει μήκος 1, τότε μετακινούμε μία σειρά κατά 1/2 δεξιά, την επόμενη σειρά κατά 1/3, την μεθεπόμενη κατά 1/4, κ.ο.κ. Έτσι θα έχουμε πάρει μία διάταξη περίπου τέτοια:

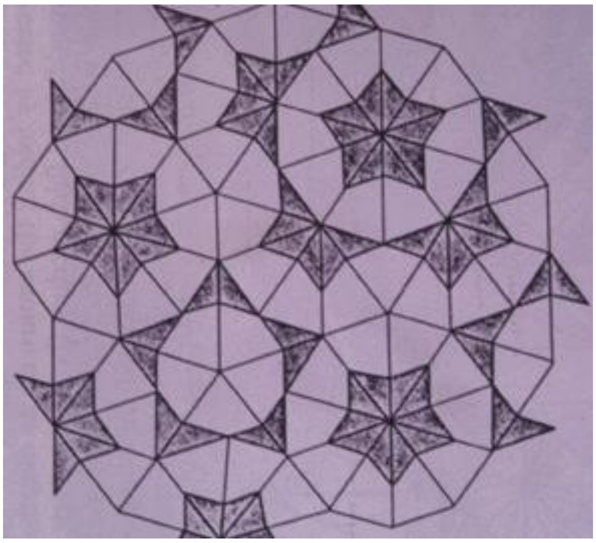


Αυτό το είδος της πλακόστρωσης δεν επαναλαμβάνεται. Η αιτία είναι ένα θεώρημα της θεωρίας αριθμών που λέει ότι το άθροισμα 1/2+ 1/3 + …1/ν δεν είναι ποτέ ακέραιος αριθμός.

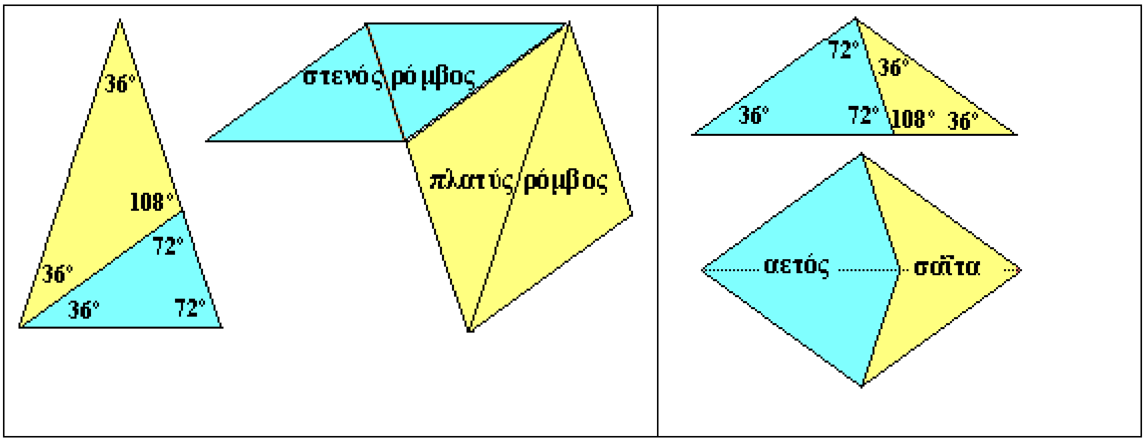
Αλλά και αν θέλουμε ένα παράδειγμα πλακοστρώσεως μη περιοδικής πλευράς με πλευρά, ας παρατηρήσουμε το σχέδιο δεξιά: Πάλι ξεκινήσαμε με την ίδια πλακόστρωση των τετραγώνων αλλά τώρα φέραμε τυχαία σε κάθε τετράγωνο την μία από τις δύο διαγώνιούς του. Είναι μεγάλες οι πιθανότητες να προκύψει έτσι μία μη περιοδική πλακόστρωση τριγώνων.



Θα δούμε στη συνέχεια τις πλακοστρώσεις Penrose που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες για τις εφαρμογές τους στους ημικρυστάλλους. Αποτελούν επίσης χαρακτηριστικό παράδειγμα μη περιοδικών πλακοστρώσεων.



Τα παραπάνω σχέδια είναι πολύ εντυπωσιακά. Είναι και τα δύο πλακοστρώσεις Penrose. Θα εξηγήσουμε πώς δημιουργήθηκαν και ποια είναι η σχέση τους με τον λόγο χρυσής τομής.



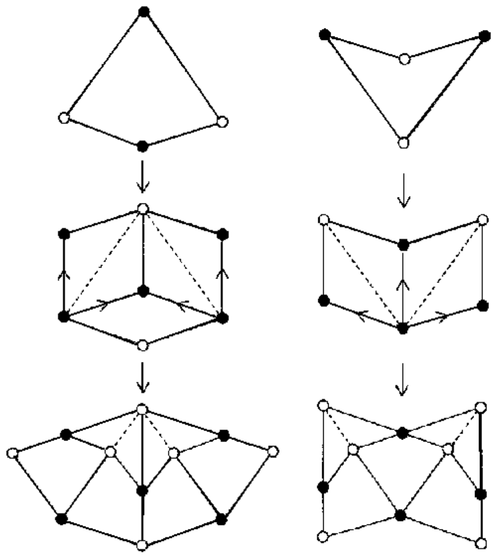
Ας δούμε πρώτα πώς παράγονται τα πλακάκια μας. Αν πάρουμε το οξυγώνιο χρυσό τρίγωνο και το διαιρέσουμε σε δύο μικρότερα χρυσά τρίγωνα, (σχέδιο αριστερά), τότε ενώνοντας τα μικρότερα με δύο όμοιά τους μπορούμε να πάρουμε έναν «στενό» ρόμβο και έναν «πλατύ» που και οι δύο έχουν ίσες πλευρές. Κατά τον ίδιο τρόπο, αν πάρουμε το χρυσό αμβλυγώνιο τρίγωνο και το διαιρέσουμε σε δύο μικρότερα χρυσά τρίγωνα (σχέδιο δεξιά), μπορούμε πάλι να ενώσουμε τα μικρότερα αυτά τρίγωνα με όμοιά τους και να πάρουμε δύο σχήματα που ονομάζουμε σαΐτα και αετό. Και εδώ, η σαΐτα και ο αετός έχουν πλευρές που ταιριάζουν μεταξύ τους και μπορούν έτσι να συνενώνονται.

Αν παρατηρήσουμε τώρα τις εικόνες με τις πλακοστρώσεις Penrose, θα δούμε ότι η πρώτη είναι μία πλακόστρωση με σαΐτες και αετούς, ενώ η δεύτερη είναι μία πλακόστρωση με στενούς και πλατιούς ρόμβους. Το ερώτημα φυσικά είναι αν αυτά τα σχέδια *είναι όντως πλακοστρώσεις*. Δηλαδή αν πάντοτε μπορούμε να προσθέτουμε σαΐτες και αετούς (ή στενούς και πλατιούς ρόμβους) στο σχέδιό μας χωρίς να δημιουργούνται κενά ή επικαλύψεις.

Υπάρχει ένα απλό γεωμετρικό επιχείρημα που μπορεί να μας πείσει ότι υπάρχουν τέτοιες πλακοστρώσεις. Η ιδέα είναι να περνάμε διαδοχικά από ένα σχέδιο με ρόμβους σε ένα σχέδιο με σαΐτες και αετούς και αντίστροφα. Πολύ αναλυτικά διδάσκεται στην ιστοσελίδα

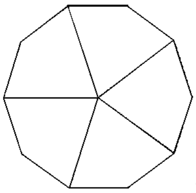
http://www2.spsu.edu/math/tiling/22.html

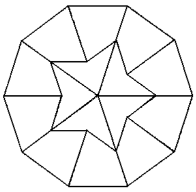
και περιγράφεται στα επόμενα σχεδιαγράμματα.

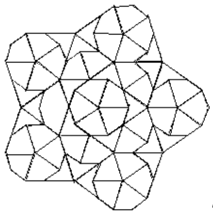


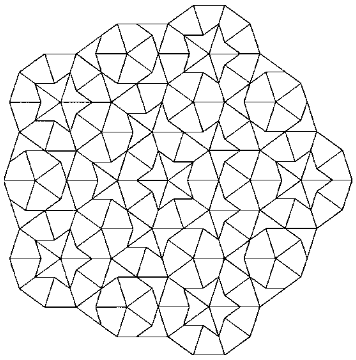
Με αυτή την διαδικασία μπορούμε αν ξεκινήσουμε από μία απλή σύνθεση από αετούς για παράδειγμα (α) και στη συνέχεια να δημιουργήσουμε συνθέσεις με μικρότερους αετούς και σαΐτες που γίνονται όλο και πιο περίπλοκες και πυκνές, όπως δείχνουν τα επόμενα σχεδιαγράμματα. Τώρα πρέπει λίγο να φανταστούμε ότι κάθε μια από αυτές τις συνθέσεις μεγεθύνεται έως ότου οι σαΐτες και οι αετοί να επιστρέψουν στο αρχικό τους μέγεθος. Τότε θα δούμε πραγματικά το επίπεδο να πλακοστρώνεται από τα πλακάκια Penrose.

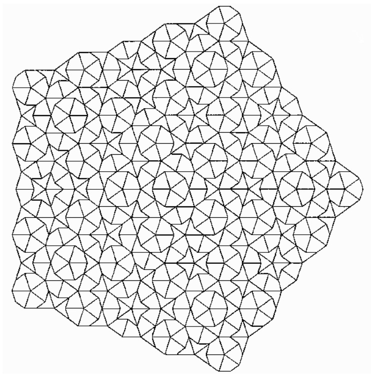
Η διαδικασία που περιγράψαμε είναι μια γνωστή μέθοδος πλακόστρωσης του επιπέδου που λέγεται μέθοδος της σύμπτυξης – επέκτασης.

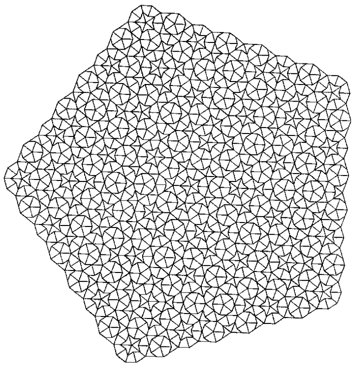

α

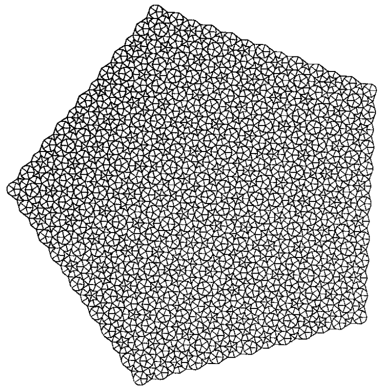

β

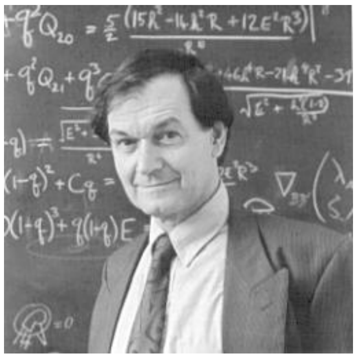

γ


δ


ε


στ


ζ



Όταν το 1970 ο sir Robert Penrose, καθηγητής στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης στην Αγγλία, ανακάλυψε τα πλακάκια του, ήταν η πρώτη πλακόστρωση που μόνο με δύο πλακάκια επέτρεπε μόνο μη περιοδικές πλακοστρώσεις. Νωρίτερα, το 1964 είχε βρεθεί το πρώτο σύνολο από πλακάκια που επέτρεπαν μόνο μη περιοδικές πλακοστρώσεις και περιείχε 20.000 διαφορετικά σχήματα! Καταλαβαίνουμε λοιπόν γιατί είναι τόσο σημαντική η ανακάλυψη του Penrose. Παρόλο που οι πλακοστρώσεις Penrose δεν είναι περιοδικές, παρουσιάζουν ένα είδος συμμετρίας που ονομάζεται **πενταπλή** και **δεκαπλή συμμετρία**. Αν πάρουμε δηλαδή ένα από τα σχηματιζόμενα δεκάγωνα (κυρτά ή μη) και στρέψουμε την πλακόστρωση γύρω από το κέντρο του κατά 75^{o} (1/5 στροφής) το σχέδιο επανέρχεται στη θέση του.

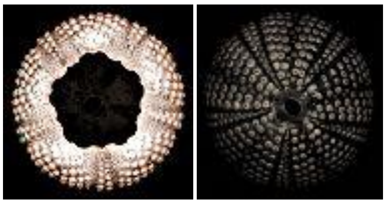
Οι πλακοστρώσεις Penrose συνδέονται άμεσα με την χρυσή τομή. Θα λέγαμε ότι αποτελούνται από χρυσούς ρόμβους, ή από χρυσές σαΐτες και αετούς. Υπάρχει όμως και κάποια άλλη εντυπωσιακή συγγένεια αυτών των δύο: Αν σε μία πλακόστρωση από ρόμβους μετρήσουμε πόσοι είναι οι πλατιοί και πόσοι οι στενοί, θα βρούμε ότι οι πλατιοί είναι 1,618… φορές περισσότεροι! Με άλλα λόγια, *ο λόγος του πλήθους των πλατιών ρόμβων προς το πλήθος τον στενών είναι ίσος με τον λόγο χρυσής τομής*. Φυσικά επειδή μετρούμε τους ρόμβους σε ένα «κομμάτι» του επιπέδου, ο λόγος αυτός δεν είναι ακριβώς ίσος με τον λόγο χρυσής τομής, πάντως όσο μεγαλώνουμε αυτό το κομμάτι, τόσο και πιο πολύ θα πλησιάζουμε τον λόγο χρυσής τομής.

Θα δούμε στη συνέχεια μία πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή των πλακοστρώσεων Penrose που είναι ένα επίτευγμα της σύγχρονης έρευνας της τεχνολογίας. Πρόκειται για την κατασκευή ημικρυστάλλων.

Οι πλακοστρώσεις είναι διατάξεις επίπεδων σχημάτων στο επίπεδο γι' αυτό και δεν έχουμε πολλές ελπίδες να συναντήσουμε πολλά φυσικά παραδείγματα στον τρισδιάστατό χώρο μας. Αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου μερικά, όπως οι διατάξεις των καρπών του καλαμποκιού στο άνθος του αραβοσίτου, οι σκελίδες του ανανά, οι φολίδες στα δέρματα των ζώων, μία τομή μιας κηρύθρας. Όλες αυτές οι επιφάνειες δεν είναι βέβαια επίπεδες, αλλά θα λέγαμε ότι είναι παραμορφώσεις του επιπέδου και γι' αυτό και συγγενεύουν αρκετά με αυτό. Μερικά παραδείγματα που συγκεντρώσαμε, φαίνονται στις ακόλουθες εικόνες:

αλιγάτορας

αχινός(επάνω–κάτω)



κόκκινο κοράλλι

Μέχρι τώρα συζητήσαμε για το πώς είναι δυνατόν να γεμίσουμε το επίπεδο με πλακάκια που επιλέγουμε. Κάτι ανάλογο μπορούμε να κάνουμε και στον τρισδιάστατο χώρο. Τώρα όμως οι δομικές μονάδες είναι επίσης τρισδιάστατες και επομένως δεν είναι πλακάκια. Θα μπορούσαμε να τα πούμε «πέτρες» ή «τούβλα», αλλά οι όροι αυτοί δεν έχουν επικρατήσει. Πάντως οι κανόνες του «παιχνιδιού» είναι πάλι οι ίδιοι: Να καλυφθεί όλος ο χώρος χωρίς να μείνουν κενά ή να παρουσιαστούν επικαλύψεις.

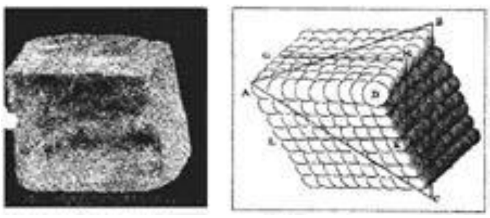
Είναι γνωστό από την φυσική ότι πολλά μόρια διαφόρων ενώσεων διατάσσονται στο χώρο με ιδιαίτερα τακτικό τρόπο. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε όλοι ότι τα μόρια του χλωριούχου νατρίου (το κοινό αλάτι) είναι τοποθετημένα σε κυβικές διατάξεις δηλαδή είναι στις κορυφές ίσων μεταξύ τους κύβων, που στοιβάζονται με τρόπο όμοιο με αυτόν που στοιβάζουν οι έμποροι όμοια κιβώτια στις αποθήκες τους. Μία τέτοια συγκέντρωση μορίων τόσο τακτικά διατεταγμένη δημιουργεί αυτό που στην φυσική ονομάζουμε κρύσταλλο.

Οι κρύσταλλοι παρουσιάζουν αρκετές συμμετρίες. Σύμφωνα με τον **νόμο του Barlow**, ή αλλιώς **κρυσταλλογραφικό περιορισμό**, ένας κρύσταλλος μπορεί να περιστραφεί γύρω από έναν άξονα κατά 180^o ή 120^o ή 90^o ή 60^o και να επιστρέψει στην αρχική του θέση, όμως μία στροφή κατά 72^o αποκλείεται να τον αφήσει στην θέση του. Με άλλα λόγια ο νόμος του Barlow δεν επιτρέπει στους κρυστάλλους πενταπλές και δεκαπλές συμμετρίες.

Το 1982 μία ομάδα επιστημόνων στο Γραφείο Μέτρων και Σταθμών των ΗΠΑ διεξήγαγε πειράματα με σκοπό την κατασκευή ισχυρών κραμάτων αλουμινίου. Συνήθως το μαγγάνιο δεν σχηματίζει κράμα με το αλουμίνιο, αλλά οι επιστήμονες αυτοί κατόρθωσαν να δημιουργήσουν μικρούς κρυστάλλους τέτοιου κράματος, ψύχοντας μίγμα των μετάλλων με ρυθμό εκατομμυρίων βαθμών ανά δευτερόλεπτο.
Όταν λοιπόν ο χημικός Daniel Shechtman, που κλήθηκε να μελετήσει την δομή των νέων κρυστάλλων, ισχυρίστηκε ότι αυτοί παρουσιάζουν πενταπλή συμμετρία, κανείς δεν τον πίστεψε.

Άλλοι επιστήμονες παρατήρησαν την σχέση που υπήρχε μεταξύ των κρυσταλλικών αυτών διατάξεων και των πλακοστρώσεων Penrose και των τρισδιάστατων αναλόγων τους. Έτσι σιγά – σιγά η επιστημονική κοινότητα, αναθεώρησε τις απόψεις της περί κρυστάλλων και οι κρύσταλλοι του Shechtman έγιναν αποδεκτοί στην οικογένεια των κρυστάλλων με το όνομα **ημικρύσταλλοι**, όπως και άλλες παρόμοιες διατάξεις με πενταπλή συμμετρία.

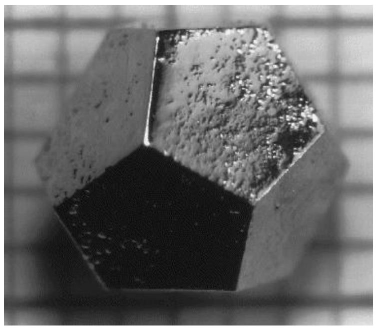
Είναι εντυπωσιακό το πώς μία καθαρά μαθηματική ιδέα όπως οι πλακοστρώσεις Penrose βρήκαν τόσο γρήγορα εφαρμογή στην τεχνολογία και μάλιστα άνοιξαν δρόμους για νέες δυνατότητες.

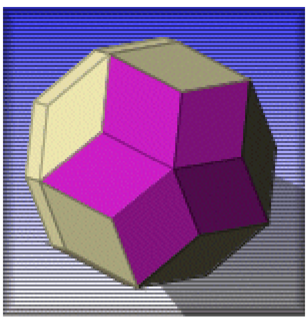


κρύσταλλος σε κυβική διάταξη

ένας κρύσταλλος

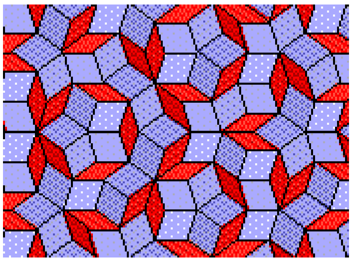
κράματος Ho-Mg-Zn.

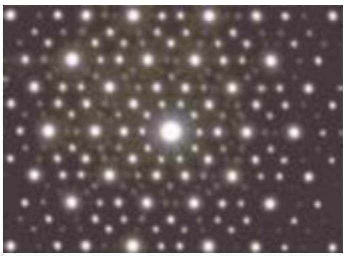


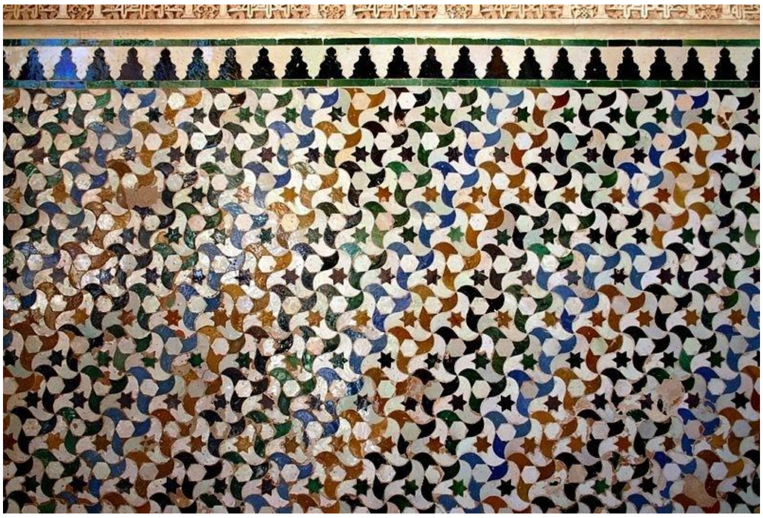


η μορφή του κρυστάλλου

του Shechtman


πλακόστρωση Penrose


αντίστοιχη κρυσταλλική διάταξη.



Παράρτημα A:
πλακοστρώσεις, θεωρία ομάδων
και το παλάτι της Alambra

Πλακόστρωση: κάλυψη όλων των επιφανειών με σχήματα που δεν επικαλύπτονται.

Από τότε που οι διάφοροι πολιτισμοί άρχισαν να ανεγείρουν σπίτια ή να κατασκευάζουν δρόμους, το ζητούμενο ήταν, να βρεθούν τρόποι συναρμολόγησης τούβλων, λίθων ή πλακών ώστε να καλυφθούν πλήρως δυσδιάστατες επιφάνειες και τρισδιάστατοι χώροι.

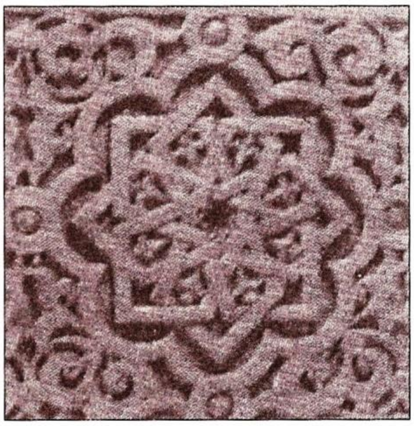
Η φυσική μας δίψα για μοτίβα και αναγνωρίσιμες εικόνες οδήγησε σύντομα τους τεχνίτες να δημιουργήσουν κάτι όμορφο στον χώρο που διαμόρφωναν.

Οι μουσουλμάνοι, δεν είχαν δικαίωμα να απεικονίζουν έμψυχα πράγματα, αυτό που χαρακτηρίζει τη διακόσμησή τους είναι η απουσία οποιασδήποτε ανθρώπινης ή ζωικής μορφής. Γι' αυτό το λόγο, ήταν υποχρεωμένοι να βρουν πιο γεωμετρικούς τρόπους για να δώσουν διέξοδο στις καλλιτεχνικές τους ανησυχίες. Γι' αυτούς, η γεωμετρία και η συμμετρία αποτελούσαν γνωρίσματα ενός τέλειου Θεού. Ταυτιζόταν ισχυρά με την άποψη του Πλάτωνα ότι "ο Θεός αεί γεωμετρεί". Οι σουλτάνοι αντάμειβαν πλουσιοπάροχα όποιον τεχνίτη ανακάλυπτε ένα νέο μοτίβο για τη διακόσμηση των τοίχων και την ευχαρίστηση των ενοίκων του παλατιού.

Στο βιβλίο του «Θεωρία Ομάδων», ο καθηγητής Marcus Du Sautoy αναφέρεται σε πολλά θέματα. Αυτό που μας αφορά στη συνθετική μας εργασία είναι οι πλακοστρώσεις και οι συμμετρίες που βρίσκονται στο παλάτι της Αλάμπρα, στην Ισπανία. Στο παλάτι αυτό υπάρχουν και τα 17 είδη πλακοστρώσεων που είναι δυνατό να φτιάξουμε και, όπως τονίζει και ο καθηγητής πολλές φορές, "χάρη στη μοναδική ισχύ των μαθηματικών, μπορούμε να δηλώσουμε με κατηγορηματικό τρόπο ότι δεν θα βρεθεί ποτέ 18ο μοτίβο, όσο δημιουργικοί κι αν φανούμε στην προσπάθειά μας να δείξουμε το αντίθετο".

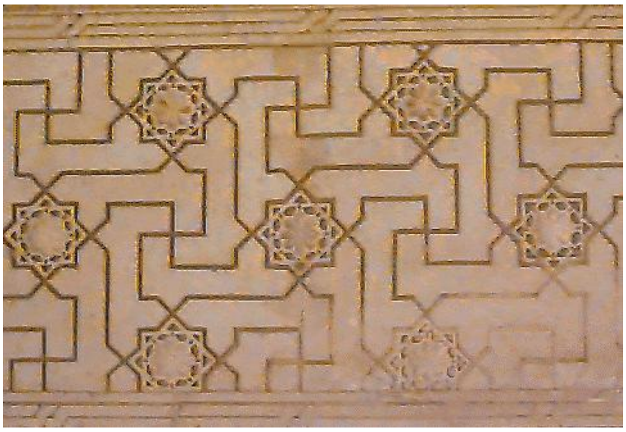
Μπαίνοντας στο παλάτι της Αλάμπρα, το πρώτο πράγμα που χτυπάει στο μάτι είναι η κατοπτρική δύναμη του νερού. Η αρχιτεκτονική του παλατιού επιδεικνύει ήδη μια κάθετη συμμετρία: η αριστερή πλευρά της πρόσοψης ανακλάται τέλεια στη δεξιά πλευρά. Αν σταθεί κανείς στη μία άκρη της μικρής λίμνης στην Αυλή των Μυρτών, θα δει ακόμα ένα τέλειο αντίγραφο του κτιρίου να ανακλάται οριζόντια στην επιφάνεια του νερού. Ο διάκοσμος του παλατιού είναι γεμάτος με εικόνες πλήρους συμμετρίας στροφών.

Οι Μαυριτανοί, όπως τα άνθη και οι αστερίες πριν από αυτούς, ανακάλυψαν τη δύναμη της συμμετρίας που κρύβεται στο αστέρι με τις πολλές κορυφές, και κάλυψαν τις οροφές, τους τοίχους, τα δάπεδα και τους κήπους της Αλάμπρα με αστέρια ακόμη πιο δαιδαλώδους τεχνοτροπίας.



Αστέρι με οκτώ κορυφές, φτιαγμένο από δύο διαπεπλεγμένα τετράγωνα.

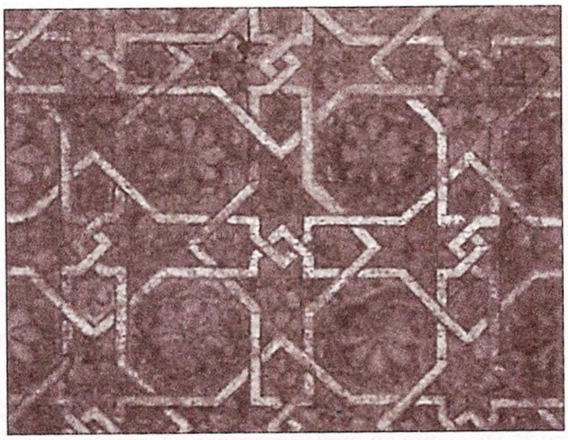
Για το σκάλισμα των αστεριών αυτών, κατέφυγαν σε ένα τέχνασμα που χρησιμοποιούν επίσης και τα άνθη. Το άνθος της μανόλιας με τα πέντε πέταλα δε διαθέτει κατοπτρική συμμετρία. Αντίθετα, τα πέταλα είναι διατεταγμένα με τέτοιο τρόπο ώστε αλληλοκαλύπτονται, καταστρέφοντας την ανακλαστική συμμετρία. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι σπειροειδές, είτε κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού είτε κατά την αντίθετη φορά. Για να δημιουργήσει τα αστέρια αυτά, ο τεχνίτης συχνά διαπλέκει μερικά τετράγωνα για την απόδοση των 8, 12 ή 16 κορυφών του αστεριού. Παρά τη σύνθετη διακόσμηση και τα έντονα χρώματα, οι συμμετρίες του όμορφου αστεριού με τις οκτώ κορυφές είναι ίδιες με τις οκτώ συμμετρίες στροφής ενός απλού οκταγώνου.



Οι τοίχοι του παλατιού είναι επιστρωμένοι με πλακίδια διαφορετικών χρωμάτων διατεταγμένα με τρόπο ώστε να σχηματίζουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Αυτό που καθιστά τις εικόνες στην είσοδο της Αλάμπρα κανονική πλακόστρωση είναι ότι το κάθε κομμάτι μπορεί να μετατοπιστεί(κάτω, πάνω, δεξιά ή αριστερά) και να ταιριάξει απόλυτα στη θέση πάνω από κάποιο αντίγραφο του εαυτού του.

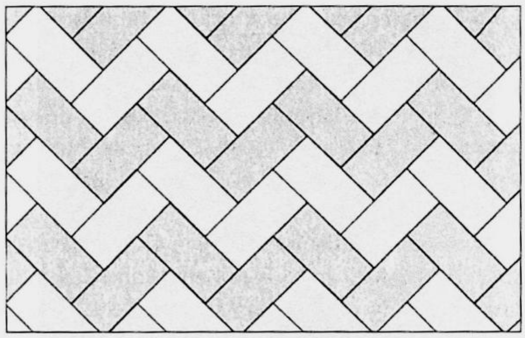
Υπάρχει όμως μεγαλύτερη κανονικότητα εδώ απ' όση κρύβει η μεμονωμένη κίνηση κάθε κομματιού. Μπορούμε να πάρουμε ένα αντίγραφο ολόκληρης της εικόνας, να το μετακινήσουμε κατά τον οριζόντιο ή τον κάθετο άξονα, και να το αποθέσουμε με τρόπο ώστε να ταιριάζει ακριβώς στην αρχική εικόνα. Η συμμετρία στον τοίχο αυτό όμως κρύβει πολύ περισσότερα από την απλή επανάληψη. Ο λόγος είναι ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε και με άλλους τρόπους την εικόνα, διατηρώντας πάντα το είδωλό της. Αντί να τη μετακινήσουμε απλώς δεξιά ή αριστερά, πάνω ή κάτω, μπορούμε πρώτα να τη στρέψουμε πριν να την επαναφέρουμε στη θέση της. Για παράδειγμα, αν κρατήσουμε σταθερό το κέντρο ενός αστεριού με τις οκτώ κορυφές και στρέψουμε ένα αντίγραφο ολόκληρης της εικόνας κατά 90 μοίρες γύρω από το σημείο αυτό, τα επιμέρους σχήματά της θα ταιριάξουν τέλεια με την αρχική εικόνα.

Το σχέδιο που κοσμεί την είσοδο του παλατιού χαρακτηρίζεται από τον τύπο συμμετρίας που είναι εξοικειωμένοι οι περισσότεροι άνθρωποι, την ανακλαστική δηλαδή συμμετρία. Το αστέρι με τις οκτώ κορυφές διαθέτει κατοπτρική συμμετρία. το μυστικό για να φανερώσουμε στον τοίχο αυτό τη συμμετρία είναι να σκεφτούμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να αφαιρέσουμε την εικόνα και να την ξαναβάλουμε πίσω στο περίγραμμα του τοίχου.



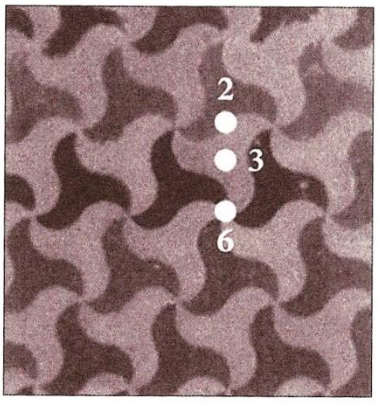
Η οροφή στην πρώτη αίθουσα της Αλάμπρα

Στην οροφή οι τεχνίτες συχνά σκάλιζαν το ξύλο ή τοποθετούσαν τα πλακίδια με τρόπο ώστε να σχηματίσουν γραμμές οι οποίες μοιάζουν σα να τρέχουν η μία κάτω από την άλλη σαν φιόγκος. Ξεγελούν έξυπνα το μάτι, κάνοντάς μας να πιστέψουμε στην ύπαρξη μια επιπλέον διάστασης κοιτώντας τον δυσδιάστατο τοίχο. Όπως και στην είσοδο του παλατιού, κρατώντας σταθερό το κέντρο του οκταγώνου, μπορούμε να το στρέψουμε κατά 90 μοίρες, και το μοτίβο στην οροφή θα έχει ακριβώς την ίδια όψη με πριν. Τον 19ο αιώνα, οι μαθηματικοί κατάφεραν επιτέλους να εφεύρουν μια γλώσσα για να εκφράσουν το γεγονός ότι τα δύο μοτίβα, το ένα στην είσοδο και το άλλο στην οροφή της Αλάμπρα, ανήκουν στην ίδια ομάδα συμμετριών, με την έννοια ότι οι στροφές έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στα αντικείμενα που στρέφονται. Το πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα από τη νέα αυτή γλώσσα ήταν ότι απέδωσε επιτέλους τη δυνατότητα στους μαθηματικούς να αποδεικνύουν ότι δε γίνεται να υπάρχουν περισσότεροι από 17 διαφορετικοί τύποι συμμετρίας πλακόστρωσης. Στην καρδιά της Αλάμπρα υπάρχει το εξαγωνικό πλέγμα κυψέλης καθώς και ένας τοίχος γεμάτος τρίγωνα. Πάνω σε έναν κίονα υπάρχει ένα μοτίβο από φυλλοειδή πλακίδια, το οποίο αρχίζει να προωθεί τις ιδέες μας περί συμμετρίας πέρα από τις καθιερωμένες ανακλάσεις και στροφές. Στο μοτίβο αυτό υπάρχει η θαυματουργή ή ολισθαίνουσα συμμετρία, κατά την οποία πρώτα αναστρέφουμε κι έπειτα μετατοπίζουμε. Το δάπεδο στην Αυλή των Λεόντων, είναι στρωμένο με τη συμμετρία που ονομάζεται διπλό θαύμα. Είναι ένα ζιγκ-ζαγκ από ορθογώνια παραλληλόγραμμα που αλλάζουν χρώματα από το άσπρο στο πράσινο. Χωρίς τα χρώματα έχουμε μια στροφή, η οποία ταιριάζει επακριβώς την πάνω σειρά με τα ζιγκ-ζαγκ πλακίδια στην κάτω σειρά. Ο παράγοντας χρώμα όμως δημιουργεί ένα διπλό θαύμα.


Ένα διπλό θαύμα στο δάπεδο της Αλάμπρα

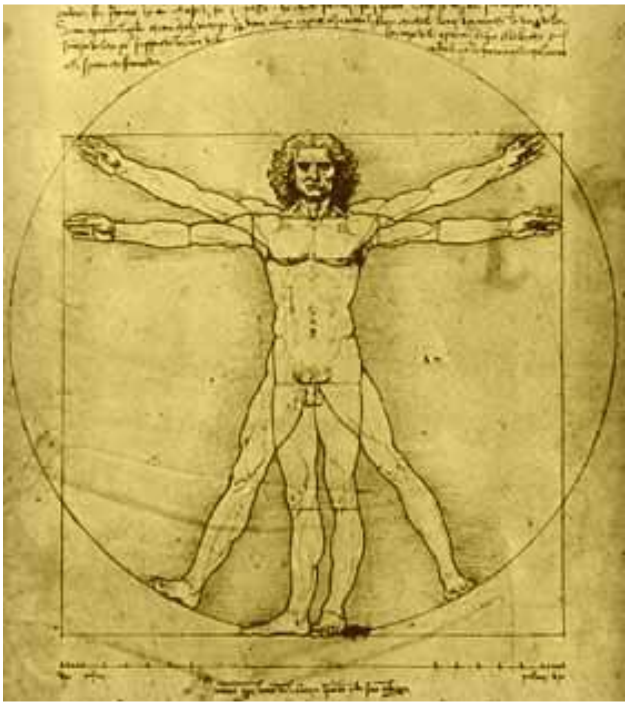
Στον τοίχο που βρίσκεται στο τέρμα της Αυλής των Λεόντων υπάρχουν έξι τρίγωνα που σχηματίζουν εξάγωνο, με τα χρώματά τους να εναλλάσσονται γύρω από το εξάγωνο από το κίτρινο στο κόκκινο. Με τη χρήση των χρωμάτων, ο τεχνίτης μετέτρεψε τη στροφή κατά το ένα έκτο σε στροφή κατά το ένα τρίτο μιας πλήρους περιστροφής, καθώς, προκειμένου να μετακινήσουμε το μοτίβο γύρω από τον ίδιο σχηματισμό, πρέπει να τοποθετήσουμε ένα κίτρινο τρίγωνο πάνω σε κίτρινο τρίγωνο. Στην Αυλή των Λεόντων υπάρχει ακόμα ένα μοτίβο. Σε αυτό δεν υπάρχουν ευθείες ανάκλασης. Μπορούμε όμως να διακρίνουμε σημεία γύρω από τα οποία μπορούμε να εκτελέσουμε περιστροφική κίνηση κατά το ένα έκτο, το ένα τρίτο και το ένα δεύτερο μιας πλήρους περιστροφής.

Στο Χαρέμι υπάρχει ολόκληρος θησαυρός από διαφορετικές συμμετρίες, που γεμίζουν με μοτίβα κάθε διαθέσιμο χώρο. Σε έναν τοίχο υπάρχει μία συμμετρία κατασκευασμένη από τρίγωνα, τα οποία όμως διαθέτουν μια ανεπαίσθητη αίσθηση περιστροφής που ακυρώνει την ανακλαστική συμμετρία. Οι καμπύλες τους δημιουργούν ένα αισθησιακό φόντο στο μέρος όπου χτυπούσε η συναισθηματική καρδιά του παλατιού. Αν αγνοήσουμε τα χρώματα, μπορούμε να στρέψουμε την εικόνα κατά το ένα τρίτο μιας πλήρους περιστροφής γύρω από το κέντρο κάθε πλακιδίου. Μπορούμε επίσης να το στρέψουμε κατά το ένα έκτο μιας πλήρους περιστροφής γύρω από το σημείο όπου συναντιούνται τα άκρα των πλακιδίων. Και τελικά, μέσα στην εικόνα βλέπουμε μια πιο ανεπαίσθητη στροφή. Αν κρατήσουμε σταθερό ένα σημείο στα μισά μιας ακμής, μπορούμε βασικά να πραγματοποιήσουμε μισή περιστροφή η οποία μετακινεί τα πλακίδια επαναφέροντάς τα τέλεια εντός του περιγράμματός τους. Αν το παρατηρήσουμε προσεκτικά είναι η ίδια συμμετρία που υπάρχει στην Αυλή των Λεόντων.



Σχήμα 35: Η ομάδα συμμετρίας 632 στον τοίχο του χαρεμιού. Κάθε κουκκίδα υποδεικνύει το σημείο γύρω από το οποίο μπορούμε να στρέψουμε την εικόνα. Οι αριθμοί αντιστοιχούν στον αριθμό επαναλήψεων που χρειάζεται κάθε στροφή ώστε να επανέλθουν τα πλακίδια στις αρχικές τους θέσεις.

Κληρονόμου Ευγενία



Παράρτημα Β:
Υπάρχει σχέση Μαθηματικών και Τέχνης;

Υπάρχει Σχέση Μαθηματικών και Τέχνης; Επιστήμης και τέχνης γενικότερα;

Τα Μαθηματικά αναμφίβολα έχουν το στοιχείο της αντικειμενικότητας και σχετίζονται με το λογικό τμήμα του ανθρώπου σε αντίθεση με την Τέχνη που έχει το στοιχείο της υποκειμενικότητας και σχετίζεται κυρίως με το συναισθηματικό τμήμα. Άρα καταρχήν φαίνεται μια μεγάλη αγεφύρωτη διαφορά.

Το θέμα της Τέχνης και της σχέσης της με τις αλήθειες των Μαθηματικών και της επιστήμης όπως και πολλά άλλα βέβαια έχει εξετασθεί εκτενέστατα στο Πλατωνικό αλλά και το Αριστοτελικό έργο και όπως σε πολλά παρόμοια ερωτήματα θα ανακαλύψουμε ξανά τον τροχό αν δεν ανατρέξουμε στις αναζητήσεις των γιγάντων της κλασικής περιόδου. Ο Πλάτων με πάνω από 100 αναφορές του στην Τέχνη, ασχολείται ιδιαίτερα με αυτήν, της ασκεί δριμύτατη κριτική, (με εξαίρεση την αρχιτεκτονική) θεωρώντας την ως απλή μίμηση της μιμήσεως, απεικόνιση και αντίγραφο δηλαδή του αισθητού κόσμου, που με τη σειρά του είναι αντίγραφο και απεικόνιση του νοητού κόσμου των ιδεών. Έτσι θεωρεί ότι είναι τρεις φορές μακριά από την αλήθεια. Η Τέχνη (ως παράγουσα εμπειρικά αντίγραφα και εικασίες) και τα Μαθηματικά ως μέσα αναζήτησης του αγαθού τοποθετούνται αξιολογικά από τον Πλάτωνα σε συγκεκριμένες θέσεις στην περίφημη τετμημένη γραμμή του διαλόγου «Πολιτεία». Και μπορεί κανείς να συμφωνήσει ή να διαφωνήσει με τις Πλατωνικές θέσεις για τη φύση της αλήθειας των Μαθηματικών προτάσεων σε σύγκριση με τη φύση της αλήθειας ή μη των δημιουργημάτων της Τέχνης. Σίγουρα όμως δεν μπορεί να μην εισέλθει στον προβληματισμό που εισάγει ο Πλάτων, διότι ο προβληματισμός για τις «μιμήσεις» της Τέχνης γενικεύεται και ερευνάται από τον μεγάλο φιλόσοφο για όλες γενικώς τις «μιμήσεις». Και οι μιμήσεις ερμηνευόμενες ως αναπαραστάσεις των εννοιών είναι βασικό εργαλείο της επιστήμης γενικότερα αλλά και της διδακτικής ειδικότερα των Μαθηματικών και των φυσικών επιστημών.

Η Αριστοτελική άποψη είναι σαφώς ευμενέστερη από αυτήν του Πλάτωνα για την Τέχνη, έχοντας σε αυτήν αφιερώσει ένα ολόκληρο βιβλίο (την «Ποιητική») από όπου και ο ορισμός της τραγωδίας «έστι ουν τραγωδία μίμησις πράξεως σπουδαίας και τελείας…κάθαρσις». Η τραγωδία επιφέρει την κάθαρση και όχι τον εκμαυλισμό της ψυχής όπως ισχυρίζεται ο Πλάτων. Ας δούμε όμως την άποψη του επιστήμονα Einstein για το θέμα αυτό: «Εκεί που ο κόσμος παύει να είναι η σκηνή για τις προσωπικές ελπίδες και επιθυμίες , εκεί που εμείς σαν ελεύθερα όντα , τον παρατηρούμε με απορία , αναρωτιόμαστε για αυτόν και μελετάμε, εκεί είναι η είσοδος στο βασίλειο της τέχνης και της επιστήμης. Εάν μεταφράσουμε αυτό που νιώσαμε και παρατηρήσαμε με τη γλώσσα της λογικής , τότε κάνουμε επιστήμη , αν το δείξουμε με μορφές των οποίων οι σχέσεις δεν είναι προσιτές στην ενσυνείδητη σκέψη αλλά αναγνωρίζονται με τη διαίσθηση ως μεστές νοήματος τότε κάνουμε τέχνη. Το κοινό στοιχείο και στην τέχνη και στην επιστήμη είναι η αφοσίωση σε κάτι που υπερβαίνει το προσωπικό , που κείται πέρα από την περιοχή της αυθαιρεσίας».

Σημαντική είναι και η συνεισφορά στο διάλογο αυτό της άποψης του Νίτσε, όπως αυτή διατυπώνεται στη "Γέννηση της τραγωδίας". Θεωρεί ότι η Τέχνη και ειδικότερα η τραγωδία είναι η προσπάθεια προσέγγισης του Διονυσιακού στοιχείου της ανθρώπινης φύσης, ενώ η επιστήμη του Απολλώνιου στοιχείο. Χωρίς την αρμονία-συνεργασία αυτών των στοιχείων η ανθρώπινη φύση είναι λειψή! Εκεί βέβαια κατηγορεί τη σωκρατική θέση αλλά αυτό είναι μια άλλη συζήτηση.
Η δική μας άποψη είναι ότι οποιαδήποτε καλλιτεχνική δημιουργία στο χώρο των εικαστικών τεχνών, από τη στιγμή που κάτι απεικονίζεται στο επίπεδο ενός καμβά ή στο χώρο εμπεριέχει αναμφίβολα, συνειδητή η ασυνείδητη χρήση γεωμετρίας και αναλογιών σε φανερή ή λιγότερο φανερή μορφή. Οι αναλογίες στην περίπτωση της ζωγραφικής μπορεί να περιορίζονται σε αναλογία τονισμού ή χρωματισμού.
Οριζόντιες γραμμές σε ένα ζωγραφικό πίνακα προσδίδουν την αίσθηση της ηρεμίας, οι κατακόρυφες την αίσθηση της έντασης ενώ οι καμπύλες «κυματιστές» γραμμές δίνουν την αίσθηση της κίνησης. Οι απλές γεωμετρικές μορφές-σχήματα αποτελούν ούτως ή άλλως βασικά παραστατικά εργαλεία αντίληψης και έκφρασης και με πρωτοπόρους τους ψυχολόγους της μορφής (Gestalt) αποτελούν πλέον αντικείμενο μελέτης της γνωστικής ψυχολογίας. Είναι άκρως ενδιαφέρουσα η αναζήτηση των ελαχίστων εκείνων γεωμετρικών στοιχείων με τα οποία η ανθρώπινη αντίληψη αντιλαμβάνεται και εκφράζει τις βασικές μορφές του περιβάλλοντος.

Είναι επίσης βέβαιο ότι σε εξπρεσιονιστικές και παραπλήσιες τάσεις της Τέχνης απουσιάζει η ύπαρξη γεωμετρικού υποβάθρου. Σημαντικό όμως παρόλα αυτά μέρος της μοντέρνας Τέχνης με πρωτεργάτες τους Kandinsky, Montrian, Vasarely, Escher κλπ χρησιμοποιεί συνειδητά γεωμετρικά σχήματα στα δημιουργήματά τους.

Μια εικαστική μορφή π.χ. ένα άγαλμα αποτελεί μια παρέμβαση στον αισθητό τρισδιάστατο χώρο, δεν είναι πάντοτε μια μείξη αυστηρών γεωμετρικών στερεών, όμως τα διάφορα μέρη του, συνειδητά η ασυνείδητα εμπεριέχουν μια αναλογία, αυτήν που αρμόζει στην ψυχική στόχευση του καλλιτέχνη. Οι αναλογίες αυτές είχαν και έχουν μια συγκεκριμένη στόχευση, π.χ. στην κλασική εποχή, την απεικόνιση του ιδανικού πολίτη - μαχητή του καλού καγαθού και βέβαια δεν προυποθέτουν τη γνώση μαθηματικών και Γεωμετρίας αλλά του καλλιτεχνικού ταλέντου.
Από την έκδοση της «Aesthetic Measure» το 1933 από το μεγάλο μαθηματικού Birkhoff (γνωστό για την εισαγωγή της εργοδικής θεωρίας μέτρου), όλο και περισσότερες έρευνες όμως έρχονται στο φως που αναδεικνύουν κρυφές μαθηματικές δομές στα έργα τέχνης και μάλιστα κάποιες από αυτές πλέον συνεπικουρούν στον έλεγχο της γνησιότητας έργων τέχνης και πεποίθησή μας είναι (ότι το αισθητικά όμορφο είναι και μαθηματικά μετρήσιμο.

Για διδακτικούς και μόνον όμως σκοπούς αναζητούμε καλλιτεχνήματα στα οποία είναι παραπάνω από φανερή η ύπαρξη γεωμετρικού και γενικότερα μαθηματικού υποβάθρου.
Θεωρούμε υπερβολική την άποψη της ύπαρξης συγκεκριμένου γεωμετρικού υποβάθρου σε μια πληθώρα πινάκων όπως αυτή του Bouleau στο βιβλίο «Η κρυφή γεωμετρία των ζωγράφων», όμως δεν μπορεί να αμφισβητηθεί το συγκεκριμένο γεωμετρικό υπόβαθρο των αναγεννησιακών προοπτικών πινάκων. Επίσης δε θα μπορούσε να αμφισβητηθεί η ύπαρξη γεωμετρικού μοτίβου στα αραβουργήματα, στα δημιουργήματα της Op Art, και σε μια σειρά τεχνοτροπιών και έργων Τέχνης, τα οποία για διδακτικούς λόγους σταχυολογούμε στη συνέχεια του κειμένου.
Η μαθηματική δομή επίσης των μουσικών δημιουργιών είναι πέραν πάσης αμφισβήτησης.

Θεργιάκη Βρέντζου Ζαχαρένια