ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

«ΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

..και μην αριθμόν, έξοχον σοφισμάτων, εξηύρον αυτοίς..

(Αισχύλος, Προμηθέας Δεσμώτης)

Τα μέλη της ομάδας που ασχολήθηκαν με την εκπόνηση αυτής της εργασίας είναι οι μαθητές της α' γυμνασίου Εμμανουήλ-Γιώργος Αρχοντάκης, Ιωάννα Παπιδάκη, Εμμανουέλλα Τσάλου και Τζίνα Χανιωτάκη. Την επίβλεψη είχε η καθηγήτρια Ειρήνη Παπαθανασίου.

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2012 – 2013.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά πιστεύουμε ότι είναι ένα από τα πιο σημαντικά πολιτιστικά συστατικά κάθε σύγχρονης κοινωνίας. Η επιρροή τους πάνω σε άλλα πολιτιστικά στοιχεία είναι τόσο θεμελιώδης και διάχυτη, που επιβεβαιώνει την άποψη πως οι «πιο σύγχρονοι» τρόποι ζωής μας δεν θα υπήρχαν χωρίς τα μαθηματικά. Η τέχνη και των πιο απλών λογαριασμών είναι αρκετή απόδειξη.

Αυτό που πραγματικά είναι αναπόφευκτο, είναι ότι κάθε μορφή ζωής που δημιουργεί πολιτισμό και τον αναπτύσσει θα δημιουργεί και μαθηματικά. Όλοι οι πολιτισμοί που έχουν ανακαλυφθεί και μελετηθεί στον πλανήτη μας έχουν αναπτύξει κάποια μορφή μέτρησης.

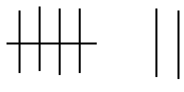
Βιβλίο Αριθμητικής του Adam Riese (1492 - 1559). Αναγράφονται οι αριθμοί με λατινικούς και με ινδοαραβικούς χαρακτήρες καθώς και η προφορά τους στα Γερμανικά.

Ο άνθρωπος δεν παρουσιάστηκε προικισμένος από τα φύση με τη γνώση ενός αριθμητικού συστήματος ή κάποιων γεωμετρικών νόμων. Όλα αυτά έπρεπε να τα επινοήσει και έπρεπε να υπάρξει κάποιο κίνητρο για να τα επινοήσει.

Μια πολύ γνωστή σχολή μαθηματικής σκέψης υποστηρίζει ότι όλα τα μαθηματικά πρέπει να θεμελιώνονται πάνω στους αριθμούς με τους οποίους μετράμε – τους 1,2,3, κ.ο.κ. – που είναι γνωστοί ως φυσικοί αριθμοί. Βέβαια, από εξελικτική άποψη, αυτή η τοποθέτηση είναι δικαιολογημένη, αφού όλα τα στοιχεία – ανθρωπολογικά και ιστορικά – δείχνουν ότι η μέτρηση και, σε τελευταία ανάλυση, τα αριθμητικά συστήματα, σαν εργαλεία μέτρησης, αποτελούν το πρώτο στάδιο εισαγωγής του μαθηματικού στοιχείου σε όλους τους πολιτισμούς που δεν έχουν επηρεαστεί από διάχυση (Διάχυση : ένας πολιτισμός που απορροφά ή δημιουργεί πάνω σ' έναν άλλο,παίρνοντας από τον τελευταίο πολιτιστικά στοιχεία). Οι ανθρωπολόγοι έχουν βρει κάποια μορφή μέτρησης σε όλους του πρωτόγονους πολιτισμούς, ακόμα και στους πιο πρωτόγονους απ' αυτούς που έχουν παρατηρηθεί, έστω και αν αυτή περιορίζεται σε λίγες μόνο αριθμητικές λέξεις.

Οι αριθμητικές λέξεις είναι συνήθως ανάμεσα στους πρώτους λεκτικούς τύπους μια γραπτής γλώσσας. «Τόσο στη Σουμερία όσο και στην Αίγυπτο, υπάρχουν κείμενα, προγενέστερα των πιο παλιών σωζόμενων δειγμάτων γραφής, που χρησιμοποιούν ένα συμβατικό σύστημα αρίθμησης. Πάντως πέρασαν πολλά εκατομμύρια χρόνια για να φτάσει ο προϊστορικός άνθρωπος στην αρίθμηση με τα δάκτυλα και μετά χρειάστηκαν πολλές χιλιετίες για την γραφή και ονομασία απλών φυσικών αριθμών και μεγάλες προσπάθειες για να εκτελούν αριθμητικές πράξεις.

Στην πραγματικότητα, η μέτρηση είναι μια διαδικασία, κατά την οποία καθορίζεται μια αντιστοιχία ανάμεσα στα αντικείμενα που μετράμε και σε ορισμένα σύμβολα, προφορικά ή γραπτά. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε σήμερα είναι εκείνα των φυσικών αριθμών – 1,2,3, κλπ. Θα μπορούσαν, όμως, να χρησιμοποιηθούν και οποιαδήποτε άλλα σύμβολα, όπως χαραγές πάνω σε ξύλο, κόμποι σε σπάγκο ή σημάδια πάνω σε χαρτί, όπως



Όλα αυτά επαρκούν για απλές μετρήσεις. Η μέτρηση, λοιπόν, είναι μια συμβολική διαδικασία που χρησιμοποιεί μόνο ο άνθρωπος, το μοναδικό ζώο – δημιουργός συμβόλων.

Όσο καιρό τα σύμβολα για τους αριθμούς ήταν μόνο προφορικά, δε φαίνεται να υπήρξε μεγάλη πρόοδος στην εξέλιξη του αριθμού. Δεν εννοούμε, βέβαια, ότι δεν εισαχθήκανε λέξεις για τη μέτρηση μεγάλου αριθμού αντικειμένων ή ότι δεν ήταν δυνατόν να εισαχθούν, αφού σε ορισμένους πολιτισμούς αυτό συνέβη. Η μεγάλη, όμως, πρόοδος στην εννοιολογική υπόσταση του αριθμού πραγματοποιήθηκε με την εισαγωγή ιδεογραφημάτων. Αυτό δεν πρέπει να εκπλήσσει, αφού η απλή αριθμητική, δύσκολα μπορεί να αναπτυχθεί χωρίς τέτοια σύμβολα.

Στη σύγχρονη άλγεβρα, τα αριθμητικά συστήματα παίρνουν πολυποίκιλες μορφές ανάλογα με τις ανάγκες της μαθηματικής θεωρίας ή των νέων εφαρμογών. Πολύ γενικά (και προσεγγιστικά), θεωρούμε ότι «Αριθμητικό σύστημα» είναι κάθε σύνολο τα στοιχεία του οποίου μπορούν να συνδυαστούν με δύο πράξεις, που συμβολίζονται ως + και x και ικανοποιούν ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες. Αυτές οι ιδιότητες είναι ανάλογες με αυτές που ικανοποιεί η πρόσθεση (+) και ο πολλαπλασιασμός (x) της κοινής αριθμητικής – της αριθμητικής, για παράδειγμα , των φυσικών ή των πραγματικών αριθμών.

Δύο λόγια για τη γραφή…….

Η γραφή γινόταν σε παπύρους, πήλινες πλάκες και πολύ αργότερα σε χαρτί με πρώτους τους Κινέζους από τον 2^{ο} μ.Χ. αιώνα. Οι Άραβες δημιούργησαν, το 794 μ.Χ., χαρτοποιείο στη Βαγδάτη, ενώ στην Ευρώπη δημιουργήθηκε το 1154.

Κάτι σαν περιεχόμενα………

Στην ανάπτυξη της εργασίας μας κάνουμε μια σύντομη ιστορική αναδρομή σε συστήματα αρίθμησης του παρελθόντος. Στη συνέχεια, αναφέρουμε ποια από αυτά τα συστήματα αρίθμησης χρησιμοποιούμε σήμερα, που και γιατί.

Αντί προλόγου…..

Όλες, σχεδόν, οι πρωτόγονες φυλές επινόησαν, σε κάποιο βαθμό, λέξεις για τους αριθμούς. Μόνο, όμως, όταν οι αρχαίοι πολιτισμοί, όπως ο Σουμεριοβαβυλωνιακός, ο Κινέζικος και ο πολιτισμός των Μάγια, ανέπτυξαν το εμπόριο, την αρχιτεκτονική, τη φορολογία και άλλα στοιχεία «πολιτισμού», τότε μόνο επινοήθηκαν αριθμητικά συστήματα.

Ας δούμε τώρα μερικά αριθμητικά συστήματα, από την αρχαιότητα ως σήμερα, που ήταν και είναι σημαντικά στην εξέλιξη – καλλιέργεια – ανάπτυξη των μαθηματικών.

Ταμαθηματικά στους Σουμέριους

Ήδη απ' την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της περιοχής που έμελλε να κατοικήσουν οι Σουμέριοι, (Μεσοποταμία) χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες "μάρκες" (tokens), τουλάχιστον όσον αφορά στην καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων . Φαίνεται λοιπόν ότι, βρισκόμαστε μπροστά σ' ένα υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων που βασίζεται σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση τον ***αριθμό 60***.

Έχουν διατυπωθεί πολλές εικασίες σχετικές με την προέλευση της περίεργης βάσης 60 στη Σουμερία. Μια από αυτές αναφέρεται στην επίδραση της Κίνας (όπου επίσης υπήρχε η βάση 60).

Σύμφωνα με τον Νόιγκεμπάουερ: «Στα οικονομικά κείμενα, πρωτεύουσα σημασία είχαν μονάδες βάρους, που μετρούσαν το ασήμι. Αυτές οι μονάδες φαίνεται καθορίστηκαν από πολύ παλιά σε αναλογία 60 προς 1, για τις βασικές μονάδες «mana» (η ελληνική μνα) και «Shekel», ο σίγλος. Παρ' όλο που οι λεπτομέρειες αυτού του γεγονότος δεν μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια, δεν πρέπει να εκπλήσσει ότι η ίδια αναλογία βρίσκεται και σε άλλες μονάδες, αλλά και στους ίδιους τους αριθμούς γενικότερα. Μ' άλλα λόγια, κάθε εξηκοστό θα μπορούσε να ονομάζεται «σίγλος», λόγω της εξοικείωσης που υπήρχε μ' αυτή την έννοια από τις οικονομικές συναλλαγές. Έτσι, η «εξηνταδική» διάταξη έγινε, τελικά, το κύριο αριθμητικό σύστημα».

Δύο σύμβολα, ***η απλή κατακόρυφη σφήνα που παριστάνει τη μονάδα (1)*** και ***η διπλή σφήνα που παριστάνει τη δεκάδα (10),*** αποτελούν τα μοναδικά "ψηφία"

του συστήματος αυτού το όποιο ήταν θεσιακό, δηλ. η αξία ενός ή περισσότερων ψηφίων καθορίζονταν απ' τη θέση που αυτό κατείχε μέσα σ' ένα αριθμό. Οι αριθμοί απ' το 1 ως το 59 σχηματίζονται με συνδυασμό των δύο βασικών συμβόλων και αριθμοί απ' το 60 και πάνω γράφονται σαν δυνάμεις του 60.

Αυτό είναι εύκολο να το κατανοήσουμε στο δικό μας δεκαδικό σύστημα, το οποίο είναι επίσης θεσιακό. Για παράδειγμα στον αριθμό 1858, το πρώτο "8" αναφέρεται σε εκατοντάδες , ενώ το δεύτερο "8" σε μονάδες. Όμοια κάθε ψηφίο φανερώνει μια αξία πολλαπλάσια κάποιας δύναμης του δέκα (10), ανάλογα με τη θέση που κατέχει μέσα σ' ένα αριθμό. Το ίδιο συμβαίνει με τους σουμεριακούς αριθμούς, μόνο που η βάση είναι ο αριθμός 60. Μάλιστα ένα σύμβολο μπορεί να αναφέρεται και σε αρνητικές δυνάμεις του 60 (π.χ. 60-2 για το 1/600) οι οποίες χρησίμευαν όπως και σήμερα για τις υποδιαιρέσεις της μονάδας, αλλά και στην τέλεση της πράξης της διαίρεσης (η διαίρεση α / β ισοδυναμούσε με τον πολλαπλασιασμό α β-1).

Για τα αριθμητικά σύμβολα, οι Σουμέριοι χρησιμοποιούσαν καλάμια με κυκλικά άκρα δύο μεγεθών. Το σύμβολο της μονάδας γινόταν με πίεση του μικρότερου άκρου από πλάγια θέση, παράγοντας κάτι σαν μισοφέγγαρο, ενώ για το συμβολισμό του 10 πίεζαν από κάθετη θέση, με αποτέλεσμα να σχηματίζεται κάτι σαν πανσέληνος.

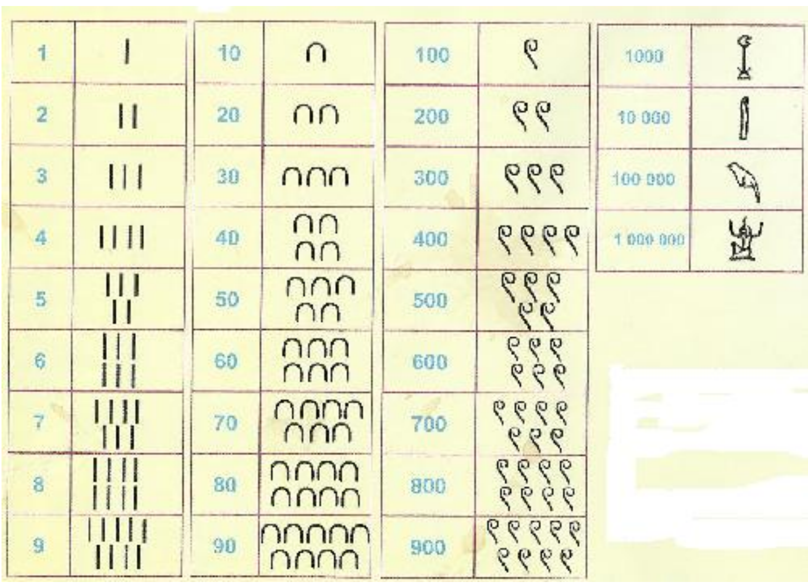
Ιερογλυφικά της Αρχαίας Αιγύπτου

Τα Αιγυπτιακά Ιερογλυφικά είναι τα αρχαιότερα εικονιστικά σύμβολα που χρησιμοποιούνταν στην αρχαία αιγυπτιακή γραφή. Η γραφή αυτή αποκρυπτογραφήθηκε από τον Ζαν-Φρανσουά Σαμπολιόν το 1822, ο οποίος χρησιμοποίησε την περίφημη Στήλη της Ροζέττας.

Τα ιερογλυφικά είναι ιδεογράμματη γραφή που χρονολογείται τουλάχιστον από το 3000 π.Χ.

Το αρχαίο αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα βασιζόταν στον αριθμό δέκα αλλά δεν ήταν ένα πλήρες ανεπτυγμένο δεκαδικό σύστημα.

Υπήρχαν διαφορετικά ιερογλυφικά σύμβολα για τις μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, δέκα χιλιάδες και ένα εκατομμύριο. Όταν ήθελαν να γράψουν, π.χ. το δύο ή το εφτά απλά επαναλάμβαναν το σύμβολο της μονάδας όσες φορές χρειαζόταν. Το ίδιο ίσχυε και για τις δεκάδες, χιλιάδες και ούτω καθ' εξής. Οι αριθμοί μερικές φορές γράφονταν και λεκτικά ,π.χ. «είκοσι» αντί 20, όπως και σήμερα, αλλά αυτό συνηθιζόταν κυρίως μόνο για το ένα και το δύο.

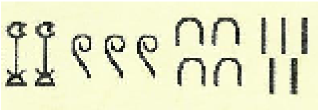


Επίσης, το αριθμητικό σύστημα είναι «προσθετικό» όπως καταλαβαίνουμε και από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

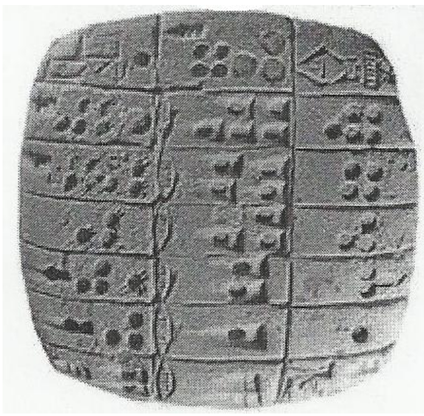
Παραδείγματα:

Ο αριθμός 435 στα αιγυπτιακά ιερογλυφικά

και ο αριθμός 2.345 =



Το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης



Το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης προέρχεται από τους Σουμέριους και στη συνέχεια από τους Βαβυλώνιους, δηλαδή χρονολογείται πριν από το 2100 π.Χ.

Οι Βαβυλώνιοι σοφοί χρησιμοποιούσαν μόνο δύο σύμβολα (!) : τη «σφήνα» και το «καρφί». Τα άλλα 57 απαραίτητα σύμβολα (η σύλληψη του μηδενός ως αριθμού και η απεικόνισή του ως συμβόλου δεν είχε επέλθει ακόμα) τα δημιουργούν από αυτά τα δύο σύμβολα.

Το 9, για παράδειγμα, συμβολιζόταν με ισάριθμες σφήνες σε τρεις τριάδες, ενώ ο αριθμός 19 γραφόταν σαν ένα καρφί και δεξιά του εννέα σφήνες σε τρεις τριάδες.

Το 59 με πέντε καρφιά και εννέα σφήνες.

Φτάσαμε τώρα στη βάση του εξηνταδικού συστήματος. Το 60 ήταν πάλι ένα καρφί.

Ο αριθμός 69 δεν γραφόταν με έξι σφήνες και εννέα καρφιά, αλλά με ένα καρφί του 60 και εννέα καρφιά του 1 δίπλα του. Πως το ξεχώριζαν λοιπόν; Όπως και εμείς σήμερα: το μόνο που διαφοροποιούσε αυτό το καρφί του 60 από τα διπλανά καρφιά του 1 ήταν η θέση του. Ένα πρόβλημα το οποίο παρουσιάζεται είναι ότι ο αριθμός 61 αναπαρίσταται με δύο «καρφιά», όπως και ο αριθμός 2. Για να το λύσουν αυτό το πρόβλημα οι Βαβυλώνιοι ένωναν τα «καρφιά» που αναπαριστάνουν μονάδες σε συμπλέγματα όπου το ένα «καρφί» ακουμπούσε το άλλο ώστε να αποτελούν ενιαίο σύμβολο.

Οι Βαβυλώνιοι έγραφαν με καλαμένια γραφίδα πάνω σε πίνακες από μαλακό πηλό, τους οποίους, στη συνέχεια, έψηναν ή ξέραιναν στον ήλιο.

Ο λόγος επιλογής του συστήματος αυτού από τους Βαβυλώνιους εικάζεται ότι είναι η προσπάθεια ενοποίησης των διαφορετικών συστημάτων αρίθμησης, που υπήρχαν εκείνη την εποχή (με βάση το 5 και το 12). Άλλοι έχουν την άποψη ότι η βάση 60 καθιερώθηκε από την αστρονομία και άλλοι ότι έχει επιλεγεί για βάση ο αριθμός 60 επειδή έχει πολλούς διαιρέτες.

Ο Νόιγκεμπάουερ γράφει ότι μια πήλινη πλάκα με εκατοντάδες αστρονομικούς αριθμούς, γραμμένους στο εξηκονταδικό σύστημα, μπορούσε να έχει στο κάτω άκρο της μια σημείωση με το όνομα του γραφέα και την ημερομηνία γραφής, στο δεκαδικό, όμως, σύστημα.

Σημασία έχει ότι μέχρι σήμερα έχει επικρατήσει το εξηνταδικό σύστημα:

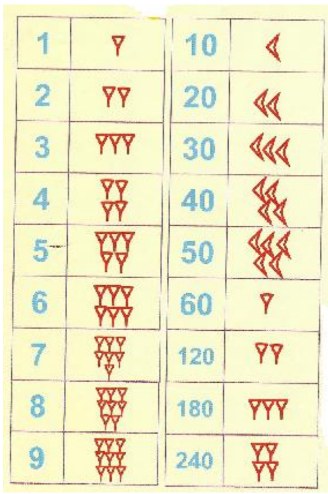
<u>για τη μέτρηση των γωνιών</u>

1^{o} (μοίρα) = 60’ (πρώτα λεπτά) και 1’ = 60’’ (δεύτερα λεπτά),

<u>του χρόνου</u>

1 ώρα = 60’ (πρώτα λεπτά) και 1’ = 60’’ (δεύτερα λεπτά).

Σφηνοειδής γραφή της αρχαίας Μεσοποταμίας



Η σφηνοειδής γραφή υπολογίζεται ότι εφευρέθηκε από τους Σουμέριους στη Μεσοποταμία, όμως άγνωστο πότε. Κατόπιν τη δέχθηκαν και την τροποποίησαν οι Ασσύριοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Ελαμίτες, οι Πέρσες, οι Χιττίτες… Διατηρήθηκε μέχρι το 1ον μ.Χ. αι. Η αποκρυπτογράφηση της έγινε από τους Γκρότεφεντ (1802) και Ρώλινσον (1846).

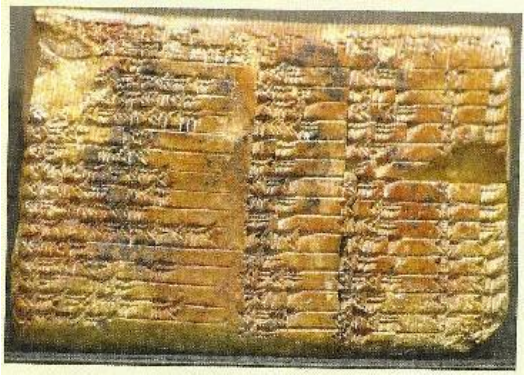
Η σφηνοειδή γραφή ονομάστηκε έτσι, επειδή τα γράμματά της και οι αριθμοί είναι ως οι σφήνες (καρφιά) και όχι γραμμές ή εικόνες πραγμάτων, όπως συμβαίνει στις άλλες παλιές και κυρίως τις ιβδικές γραφές.

Το σύστημα αρίθμησης της ήταν εξηκονταδικό, με σύμβολα για τις δεκάδες.

Παράδειγμα αριθμού στη σφηνοειδή γραφή:

47 = 

Στην εικόνα φαίνεται η σπουδαία πινακίδα Plimton 322 η οποία περιέχει πλήθος αριθμών γραμμένων με συστηματικό τρόπο.



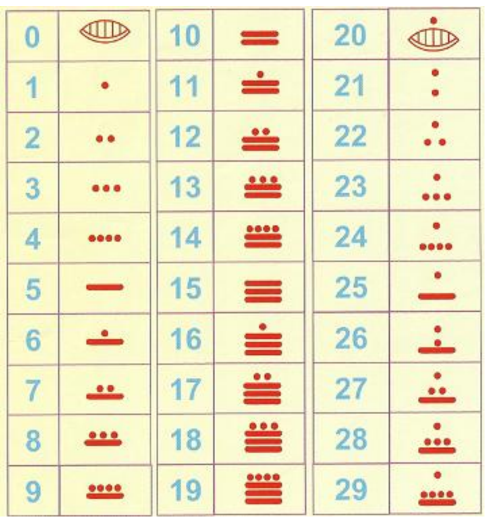
Οι αριθμοί στο σύστημα των Μάγιας

Το πιο αξιοθαύμαστο γεγονός είναι ότι οι Μάγια ήταν ο πρώτος λαός του κόσμου που χρησιμοποίησε τον αριθμό «0», αιώνες πριν χρησιμοποιηθεί στην Ευρώπη στην οποία τον έφεραν οι Άραβες, που τον είχαν μάθει από τους Ινδούς. Αυτή η αφηρημένη αντίληψη, τόσο συνηθισμένη για μας σήμερα, αποτελεί ένα μεγάλο κατόρθωμα και επέτρεψε στους Μάγια να φτιάξουν ένα από τα καλύτερα αριθμητικά συστήματα όλων των εποχών.

Η χρήση του «0» και το εικοσαδικό σύστημα που χρησιμοποιούσαν (αντί δεκαδικό όπως το δικό μας), τους επέτρεπαν να κάνουν πολύπλοκους λογαριασμούς. Παρίσταναν τη μονάδα με μία τελεία (.) και την αξία 5 με ένα ραβδί (-). Τον αριθμό 0 τον αναπαρίσταναν μ' ένα κοχύλι ή ένα λουλούδι. Σε κάποιες σημαντικές περιπτώσεις, αναπαρίσταναν τους αριθμούς με ανθρώπινα κεφάλια. Η γραφή των αριθμών μέχρι τον 19 γινόταν με «προσθετικό» τρόπο. Από εκεί και πέρα το σύστημα είχε βάση το 20.

Π.χ. 74 = 3 x 20 + 14.

Οι αριθμοί γράφονταν σε στήλες που διαβάζονταν από κάτω προς τα πάνω. Με αυτό τον τρόπο, δημιουργούσαν ένα σύστημα «κατά θέσεις» ή τοποθέτησης για την σημειογραφία των αριθμών, που τους επέτρεπε να γράφουν μεγάλους αριθμούς.

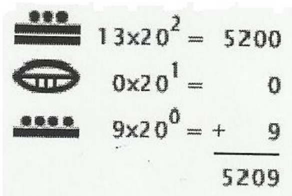


Στο δικό μας αριθμητικό σύστημα, τοποθετούμε τις δεκάδες αριστερά από τις μονάδες, πιο αριστερά τις εκατοντάδες, μετά τις χιλιάδες, κλπ. Με τον ίδιο τρόπο, οι Μάγια έγραφαν τις μονάδες (1 έως 19) στην κατώτερη σειρά, από πάνω τις εικοσάδες, πιο πάνω τις εικοσάδες εικοσάδων και ούτω καθ' εξής. Το 0 το χρησιμοποιούσαν με τον ίδιο τρόπο που το κάνουμε εμείς: σήμερα η τοποθέτηση ενός μηδενικού σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε τη μονάδα επί 10 ή επί 100 ή επί 1000, σύμφωνα με το ποσό αριστερά γράφουμε το 0. Οι Μάγια πολλαπλασίαζαν επί 20 ή 200 ή 2000, σύμφωνα με το πόσο ψηλά το έγραφαν.

Το σύστημα είναι σχεδόν ίδιο με το δεκαδικό και, οπωσδήποτε, πιο απλό από το Ρωμαϊκό σύστημα, όταν πρόκειται για μεγάλους αριθμούς και πολύπλοκους λογαριασμούς.

Για παράδειγμα, το τέσσερα σχηματίζεται από τέσσερις τελείες, το επτά από μια παύλα και δύο τελείες, και το δεκαεννέα από τρείς παύλες και τέσσερις τελείες 3 x 5 + 4 x 1 = 19. Οι αριθμοί πάνω του 20 γράφονταν με την χρήση της θεσιακής σημειογραφίας, βάζοντας την μεγαλύτερη σε αξία μονάδα στο πάνω μέρος,

για παράδειγμα:



Το ακροφωνικό ή Ηρωδιανό σύστημα αρίθμησης

Στην αρχαία Ελλάδα, κυρίως την κλασική εποχή, αναπτύχθηκε ένα σύστημα αρίθμησης το λεγόμενο ακροφωνικό, όπου το ''Δ'' συμβόλιζε το **Δ**έκα.

Την ακριβή περιγραφή του αριθμητηρίου την έδωσε ο Έλληνας γραμματικός Ηρωδιανός (170-240 μ.Χ) του οποίου μέχρι σήμερα φέρει το όνομα.

<u>Αριθμός – Σύμβολο - Ονομασία</u>

1 – Ι - Ένα

5 – Π - **Π**έντε

10 – Δ - **Δ**έκα

100 – Η – **Η**εκατόν

1000 – Χ - **Χ**ίλια

10000 – Μ – **Μ**ύρια

Από κει και πέρα γίνεται συνδυασμός των συμβόλων. Για παράδειγμα το 50 συμβολίζεται με ένα Π το οποίο περιέχει ένα Δ, που σημαίνει 5 x 10.

1	Ι	10	Δ	100	Η	1000	Χ
2	ΙΙ	20	ΔΔ	200	ΗΗ	2000	ΧΧ
3	ΙΙΙ	30	ΔΔΔ	300	ΗΗΗ	5000	𐅆
4	ΙΙΙΙ	40	ΔΔΔΔ	400	ΗΗΗΗ	6000	𐅆Χ
5	Γ	50	𐅄	500	𐅅	10000	Μ
6	ΓΙ	60	𐅄Δ	600	𐅅Η	20000	ΜΜ
7	ΓΙΙ	70	𐅄ΔΔ	700	𐅅ΗΗ	50000	𐅇
8	ΓΙΙΙ	80	𐅄ΔΔΔ	800	𐅅ΗΗΗ	60000	𐅇Μ
9	ΓΙΙΙΙ	90	𐅄ΔΔΔΔ	900	𐅅ΗΗΗΗ		

Τότε η λέξη εκατό γραφόταν hεκατόν, γιατί το h(H) χρησιμοποιούνταν για την παράσταση της δασείας, αργότερα αντικαταστάθηκε από τη δασεία και το h(H) χρησιμοποιήθηκε για την παράσταση του μακρόχρονου ε (Ε)

Επειδή τα γράμματα Π,Δ,Η,Χ,Μ που χρησιμοποιούνται για την παράσταση των αριθμών, είναι ακραία (αρχικά) γράμματα λέξεων, το σύστημα γραφής λέγεται ακροφωνικό.

Για τους αριθμούς 50, 500, 5000, 50000 (πενταπλάσια των 10, 100, 1.000, 10.000) χρησιμοποιούσαν τα: Δ,Η,Χ,Μ κάτω από το Π

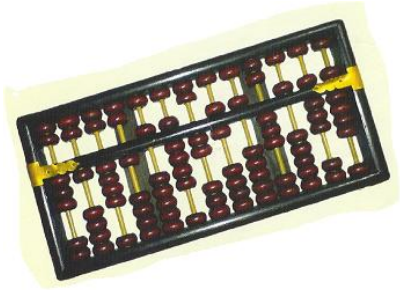
Για να γράψουν τους άλλους αριθμούς παραθέτανε ή επαναλαμβάνανε τα κατάλληλα σύμβολα από αυτά μέχρι να σχηματιστεί προσθετικά ο αριθμός.

Π.χ ο αριθμός 478 γράφεται: ΗΗΗΗ𐅄ΔΔΓΙΙΙ

Το κινεζικό σύστημα αρίθμησης

Τέσσερα κλασικά έργα διασώζονται από την αρχαία Κίνα, τα οποία μας βοηθούν να καταλάβουμε τα κινέζικα μαθηματικά πριν από το 1000 π.Χ.. Το πρώτο είναι το Σου-Ζινγκ το οποίο περιλαμβάνει αρκετά πολύπλοκους αστρονομικούς υπολογισμούς που έγιναν στην αρχαία Ελλάδα. Το Ι-Ζινγκ, το δεύτερο κατά σειρά, δεν είναι στην πραγματικότητα ένα βιβλίο μαθηματικών, αλλά ένα βιβλίο που χρησιμοποιούνταν από τους Κινέζους επί χιλιετίες για να μαντέψουν ποια πορεία δράσης

1	一	10	十	100	一百
2	二	20	二	200	二百
3	三	30	三十	300	三百
4	四	40	四十	400	四百
5	五	50	五	500	五百
6	六	60	六十	600	六百
7	七	70	七	700	七百
8	八	80	八十	800	八百
9	九	90	九十	900	九百
0	零				



έπρεπε να ακολουθήσουν σε σημαντικά θέματα.

Όσον αφορά τα εργαλεία που χρησιμοποιούσαν για τους υπολογισμούς τους ο άβακας ήταν το πρώτο, όπου ακόμα και στις μέρες μας έχει σχεδόν καθολική χρήση. Η επινόηση του άβακα ήταν Ελληνική, όπως άλλωστε και το όνομα **Άβαξ**. Κάθε σύρμα έχει 5 σφαίρες κάτω από την διαχωριστική βέργα και 2 σφαίρες από πάνω. Τα σφαιρίδια κάτω από τη διαχωριστική βέργα του άβακα έχουν αξία μια μονάδα, ενώ τα από πάνω έχουν αξία 5 μονάδες.

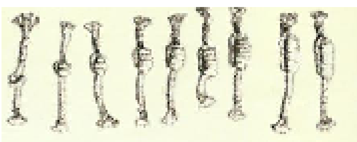
Οι Κινέζοι έκαναν νοητικά τους υπολογισμούς και μετά χρησιμοποιούσαν ένα υπολογιστικό πινάκιο για την καταγραφή των αποτελεσμάτων. Το υπολογιστικό πινάκιο, από το οποίο προήλθε ο άβακας, ήταν μια επίπεδη ξύλινη επιφάνεια με ζωγραφισμένες γραμμές που σχημάτιζαν ένα ορθογώνιο με τετράγωνα. Ράβδοι μήκους περίπου δέκα εκατοστών τοποθετούνταν σε διαφορετικά τετράγωνα για να συμβολίζουν τις μονάδες, ενώ τα ίδια τα τετράγωνα συμβολίζουν μεγαλύτερους αριθμούς. Χρησιμοποιούνταν δύο είδη ράβδων. Κόκκινες για τους θετικούς και μαύρες για τους αρνητικούς. Υπάρχουν αναφορές ότι οι Κινέζοι μαθηματικοί ήταν εξαιρετικά επιδέξιοι με τους πίνακες αρίθμησης και μπορούσαν γρήγορα να εκτελέσουν ιδιαίτερα πολύπλοκες πράξεις.

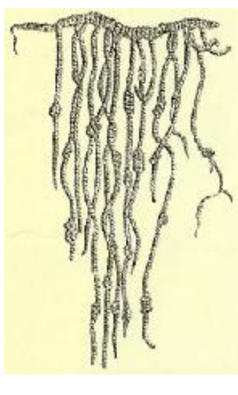
Οι πρώτες μαθηματικές έννοιες των Κινέζων χρονολογούνται από πολύ παλιά. Ήδη απ' τον 13ο αιώνα π.Χ οι Κινέζοι είχαν σύστημα δεκαδικής αρίθμησης, ανάλογο μ' εκείνο που υπάρχει σήμερα. Ακόμα, απ' τον $3^{ο}$ π.Χ. αιώνα οι Κινέζοι έδωσαν μια πρωτότυπη λύση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Επίσης, υπολόγισαν κατά προσέγγιση τον αριθμό π κι έλυσαν τις εξισώσεις πρώτου βαθμού. Η χρήση όμως του μηδενικού άρχισε τον $8^{ο}$ αιώνα μ.Χ και κατά το $12^{ο}$ με $13^{ο}$ αιώνα μ.Χ η κινέζικη άλγεβρα γνώρισε μεγάλη ανάπτυξη.

Τα quipu των Ίνκας

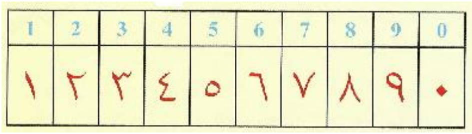
Οι Ίνκας δεν είχαν σύστημα γραφής των αριθμών. Όποτε χρειάζονταν να καταγράψουν αριθμούς ή άλλες πληροφορίες, χρησιμοποιούσαν ένα πολύπλοκο σύστημα κόμπων σε σπάγκους, που ονομάζεται quipu.

Π.χ. η καταγραφή του 26 αποτελείται από 6 κόμπους στο ελεύθερο άκρο ενός σπάγκου και άλλους 2 κόμπους λίγο πιο μέσα.





Οι αριθμοί στα Αραβικά



Οι αριθμοί στα Σανσκριτικά

Η γραφή των αριθμών στο Ιωνικό αλφαβητικό σύστημα αρίθμησης και η χρήση τους σε κείμενα αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών

Μια σημαντική κατάκτηση στα αριθμητικά συστήματα ήταν η επινόηση από τους Έλληνες του αλφαβητικού συστήματος αρίθμησης. Από τον 5ο π.Χ. αιώνα, αλλά κυρίως από τους χρόνους των διαδόχων του Μ. Αλεξάνδρου, αρχίζει να διαδίδεται στις Ελληνικές πόλεις αυτό το *νέον αριθμητικό σύστημα* όπου είναι πολύ ικανοποιητικό για τις καθημερινές τους ανάγκες και τις οικονομικές τους συναλλαγές. Ακόμα και οι επιστήμονες, όπως ο Αρχιμήδης, το χρησιμοποιούσαν στους υπολογισμούς τους. Η ευκολία με την οποία το χρησιμοποιούσαν ήταν, ίσως, η αιτία της διατήρησής του στην Ανατολική Ρωμαϊκή αυτοκρατορία μέχρι τον 15ο αιώνα. Συγκεκριμένα, φαίνεται πως ήταν καταλληλότερο για να χρησιμοποιείται στις καθημερινές ανάγκες από τα άκομψα ρωμαϊκά σύμβολα. Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι ο Γάλλος μαθηματικός Τάνερι εξοικειώθηκε με το ελληνικό αριθμητικό σύστημα, κάνοντας τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής, σύμφωνα με τον τρόπο που τις έκανε ο Αρχιμήδης στο *Κύκλου Μέτρησης*. Έτσι, διαπιστώθηκε ότι «υπήρχαν πρακτικά πλεονεκτήματα, που δεν υποπτευόταν πριν και ότι οι πράξεις χρειάζονταν λίγο περισσότερο χρόνο, σε σχέση με τα σύγχρονα αριθμητικά σύμβολα».

Το σύστημα αυτό παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι, αποφεύγει την επανάληψη συμβόλων, όπως τη γνωρίσαμε στα άλλα αρχαία συστήματα. Έτσι προέκυψε μια συντόμευση της γραφής, που θα την αντιληφθούμε κατά τον σχηματισμό των αριθμών.

Στο αλφαβητικό (Ιωνικό) σύστημα οι αριθμοί παριστάνονται με σύμβολα:

24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και 3 αρχαϊκά (φοινικικά) που είναι

το δίγαμμα ⊏, το κόππα (Ϙ) και το σαμπί (Ϡ).

Η αντιστοιχία μεταξύ των γραμμάτων και των αριθμών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Σημερινή γραφή	Ιωνική γραφή	Σημερινή γραφή	Ιωνική γραφή	Σημερινή γραφή	Ιωνική γραφή
1	Α α'	10	Ι ι'	100	Ρ ρ'
2	Β β'	20	Κ κ'	200	Σ σ'
3	Γ γ'	30	Λ λ'	300	Τ τ'
4	Δ δ'	40	Μ μ'	400	Υ υ'
5	Ε ε'	50	Ν ν '	500	Φ φ'
6	Ϛ ς'	60	Ξ ξ	600	Χ χ'
7	Ζ ζ'	70	Ο ο'	700	Ψ ψ'
8	Η η'	80	Π π'	800	Ω ω'
9	Θ θ'	90	Ϙ Ϙ	900	Τ ϡ,

Αρχικά για τη γραφή των αριθμών χρησιμοποιούνταν τα κεφαλαία γράμματα και αργότερα τα μικρά. Υπάρχουν δύο τρόποι χρησιμοποίησης των γραμμάτων ως αριθμών. Με τον πρώτο τρόπο έβαζαν πάνω από το γράμμα μια οριζόντια παύλα και με το δεύτερο μια οξεία στο πάνω και δεξιό μέρος του αριθμού.

Όπου, όμως, δεν υπήρχε σύγχυση ως προς τη γραφή των αριθμών και των γραμμάτων, οι οξείες παραλείπονταν.

Όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι του 1.000 γράφονταν με τρία το πολύ σύμβολα. Για να γράψουν αριθμούς μεγαλύτερους από το 999 χρησιμοποιούσαν διάφορα τεχνάσματα, τα οποία στηρίζονταν σε πολλαπλασιαστικές αρχές. Έτσι, για παράδειγμα, μια μικρή γραμμή κάτω αριστερά από το γράμμα σήμαινε ότι ο αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 1000. Επομένως, οι αριθμοί 1000, 2000, …, 9000 δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Σημερινή γραφή	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
Ιωνική γραφή	,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,θ

Άρα, για να γράψουν αριθμούς μικρότερους του 10.000, χρησιμοποιούσαν μόνο τέσσερα γράμματα, από τα οποία, μάλιστα, το ψηφίο των χιλιάδων ήταν όπως και των μονάδων, με μοναδική διαφορά το σημάδι του τόνου.

Για τον προσδιορισμό της αξίας των αριθμών, το σύστημα χρησιμοποιεί την πρόσθεση της αξίας των ψηφίων καθενός αριθμού. Για παράδειγμα δίνουμε τέσσερις αριθμούς γραμμένους κατά το Ελληνικό αριθμητικό σύστημα και φυσικά μαζί με την εξήγησή τους σε σύγχρονους αριθμούς:

υνϛ' = 400 + 50 + 6 = 456 δχπβ' = 4000 + 600 + 80 + 2 = 4682

,ασο' = 1000 + 200 + 70 = 1270 ,ηωκ' = 8000 + 800 + 20 = 8820

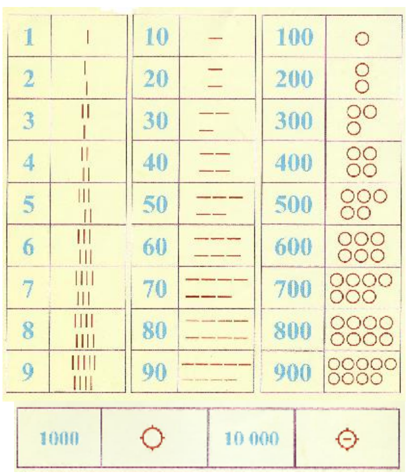
Το σύστημα είναι δεκαδικό και θεμελιώδεις μονάδες του είναι αυτές που ακολουθούν:

α' (= 1), ι' (= 10), ρ' (= 100), ,α (= 1000).

Οι αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ των μονάδων δεν σχηματίζονται με επαναλήψεις, αλλά με δικά τους σύμβολα. Φυσικά, τα σύμβολα έχουν γίνει πολλά, όμως εύκολα συγκρατούνται στη μνήμη, γιατί η διαδοχή τους ακολουθεί τους γνώριμους φθόγγους των γραμμάτων του λόγου, δηλαδή του αλφαβήτου. Και σ' αυτό το αριθμητικό σύστημα που επικράτησε στην Ευρώπη μέχρι τον $12^{ο}$ αιώνα, ίσως και περισσότερο, παρατηρούμε την έλλειψη του μηδέν. Η ιδέα του μηδέν (ή ***ουθέν*** στα αρχαία Ελληνικά), ήταν γνωστή κατά την αρχαιότητα σαν έλλειψη μονάδων, αλλά δεν χρησιμοποιείτο για το σχηματισμό των αριθμών. Έτσι η αξία των αριθμών ήταν συνδεδεμένη με τα σύμβολα.

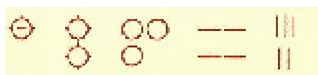
Επειδή το Ελληνικό σύστημα, όπως και τα άλλα αρχαία συστήματα, παρουσίαζαν δυσκολίες στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, για τη διευκόλυνση των υπολογισμών επινοήθηκαν κατάλληλες συσκευές, που πήραν το όνομα «Άβακες». Η επινόηση του άβακα ήταν Ελληνική, όπως άλλωστε και το όνομα **Άβαξ.** Στην αρχαία Ελλάδα οι άβακες χρησιμοποιούντο από τον 6ο αιώνα π.Χ.

Αρχαία Μινωική γραφή σε Γραμμική Β



Στην αρχαία Κρήτη χρησιμοποιούσαν από το 1350 π.Χ. περίπου την Γραμμική Β, η οποία αντικατέστησε παλαιότερες γραφές.

Το σύστημα γραφής αριθμών είναι «προσθετικό» με βάση το δέκα.

Παράδειγμα: 12.345 = 

Το Ιταλο-Ρωμαϊκό σύστημα γραφής (ή Λατινική γραφή)

Το Ρωμαϊκό σύστημα αριθμητικής γραφής στηρίζεται στα παλαιότερα συστήματα, παρουσιάζει όμως και βελτιώσεις. Τα σύμβολα του συστήματος είναι απλούστερα, χρησιμοποιούνται δε και γράμματα του αλφαβήτου ως αριθμητικά σύμβολα.

<u>Χαρακτήρες αναπαράστασης</u>

Το σημερινό σύστημα περιλαμβάνει 7 γράμματα αναπαράστασης για τις θεμελιώδεις μονάδες,με τις κάτωθι αξίες στο δεκαδικό σύστημα:

- ***I = 1***
- ***V = 5***
- ***X = 10***
- ***L = 50***
- ***C = 100***
- ***D = 500***
- ***M = 1.000***

Παρατηρούμε ότι, εκτός από τα σύμβολα μονάδων (1, 10, 100, 1.000) έχουν τοποθετηθεί σύμβολα για τους αριθμούς (5, 50, 500). Αυτό έγινε προφανώς για να αποφεύγεται η μεγάλη επανάληψη συμβόλων. Έτσι, αν δεν υπήρχε το σύμβολο V (του 5), ο αριθμός 8 θα γραφόταν με επανάληψη οκτώ μονάδων, δηλαδή: ***IIIIIIII.*** Ενώ με τη χρήση του V ο αριθμός 8 γράφεται: ***VIII.***

<u>Κανόνες σύνταξης</u>

Οι κανόνες αναπαράστασης έχουν ως εξής:

- Όταν έχουμε δύο ή τρία ίδια γράμματα στη σειρά τότε οι αξίες των γραμμάτων προστίθενται:
  Π. χ. : ***II*** = 2, ***III*** = 3, ***XXX*** = 30, ***CC*** = 200
  Γενικότερα, το Ρωμαϊκό σύστημα, για να εκφράσει την αξία των αριθμών, χρησιμοποιεί την πρόσθεση της αξίας των ψηφίων.
  Παραδείγματα : ***MMDCCC*** (1.000 + 1.000 + 500 + 100 + 100 + 100) = 2.800
  MDCLV (1.000 + 500 + 100 + 50 + 5) = 1.655.
- Όμως το σύστημα, προκειμένου να πετύχει τη συντομία, χρησιμοποιεί και την αφαίρεση. Όταν έχουμε δύο γράμματα στη σειρά και το γράμμα που βρίσκεται στα δεξιά είναι μεγαλύτερης αξίας ή το γράμμα στα αριστερά μικρότερης αξίας τότε αφαιρούνται:
  Π.χ. ***IV*** = 4, ***IX*** = 9, ***CD*** = 400.

<u>Παρατηρήσεις</u>

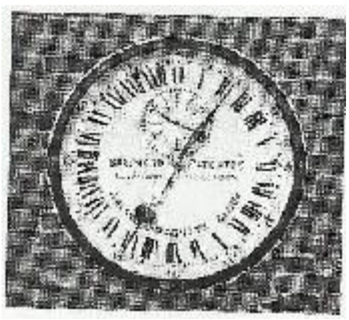
- Τα σύμβολα ***I,X,C*** και ***M*** μπορούν να επαναληφθούν διαδοχικά μέχρι τρεις φορές. Κατ' εξαίρεση στα καντράν ρολογιών συχνά υπάρχει και η αναπαράσταση ***IIII*** που αντιστοιχεί στον αριθμό 4.
- Τα σύμβολα ***D, L*** και ***V*** δεν μπορούν να επαναληφθούν.
- Το σύμβολο ***I*** μπορεί να αφαιρεθεί μόνο από τα σύμβολα ***V*** και ***X***.
- Το σύμβολο ***X*** μπορεί να αφαιρεθεί από τα σύμβολα ***L*** και ***C***.
- Το σύμβολο ***C*** μπορεί να αφαιρεθεί από τα σύμβολα ***D*** και ***M***.
- Τα σύμβολα ***V,L*** και ***M*** δεν αφαιρούνται ποτέ.
- Το δεκαδικό ψηφίο **0** και ο αριθμός «**0**» δεν αναπαρίστανται και δεν υπάρχουν στους ρωμαϊκούς αριθμούς.

Τώρα μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα τους λατινικούς αριθμούς στον πίνακα που ακολουθεί.

1	I	10	X	100	C
2	II	20	XX	200	CC
3	III	30	XXX	300	CCC
4	IV	40	XL	400	CD
5	V	50	L	500	D
6	VI	60	LX	600	DC
7	VII	70	LXX	700	DCC
8	VIII	80	LXXX	800	DCCC
9	IX	90	XC	900	CM

Παράδειγμα : 1824 = ***MDCCCXXIV***

Σήμερα βλέπουμε διατήρηση του λατινικού συστήματος γραφής αριθμών, σε ρολόγια και σε χρονολογίες. Επίσης, το χρησιμοποιούμε και σε αρίθμηση περιπτώσεων.



Το ***Shepherd gate clock*** με ρωμαϊκούς αριθμούς, στο Γκρήνουϊτς

Το δεκαδικό (ινδοαραβικό) σύστημα αρίθμησης

Οι ινδοί μαθηματικοί, με τη χρήση του άβακα (η πρώτη αριθμομηχανή) και έχοντας υπόψη την ελληνική και κινέζικη αριθμητική επινόησαν το δεκαδικό σύστημα θέσης γύρω στα 500 μ. Χ..

Τα ψηφία 1 ως 9 που χρησιμοποιούμε σήμερα προέρχονται από ινδικές μορφές και για το μηδέν οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν αρχικά μια τελεία και αργότερα την ωοειδή μορφή. Επίσης οι Ινδοί γνώριζαν και σε κάποιο βαθμό και αρνητικούς αριθμούς.

Κατά πόσο, όμως, και τι ακριβώς δανείστηκαν οι Ινδοί από άλλους πολιτισμούς αποτελεί ζήτημα εικασιών και αμφισβητήσεων. Ότι η Βαβυλωνιακή επιρροή αποτέλεσε παράγοντα ανάπτυξης των ινδικών μαθηματικών είναι αποδεδειγμένο, η έκταση, όμως, αυτής της επιρροής δεν μπορεί να καθοριστεί ακριβώς. Είναι, για παράδειγμα, το ινδικό μηδέν πολιτιστικός απόγονος του βαβυλωνιακού; Στην περίοδο μεταξύ 200 – 600 μ. Χ., όταν άρχισε να χρησιμοποιείται το δεκαδικό σύστημα στην Ινδία, οι Ινδοί γνώριζαν την ελληνική αστρονομία. Και σαν συνέπεια του ενδιαφέροντός τους για την ελληνική αστρονομία, οι Ινδοί γνώρισαν επίσης το εξηνταδικό σύστημα θέσης και τη χρήση ενός συμβόλου που να δηλώνει την απουσία ψηφίου («μηδενός»). Ως πρόσθετη ένδειξη, επισημαίνεται ότι στους λεγόμενους ινδικούς «έμμετρους αριθμούς» τοποθετούνταν πάντα πρώτα οι μονάδες, ακολουθούσαν οι δεκάδες κοκ, ενώ οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες χρησιμοποιούσαν την αντίστροφη σειρά. Όταν οι Ινδοί άρχισαν να χρησιμοποιούν ψηφιακά σύμβολα, υιοθέτησαν τον τρόπο γραφής των Βαβυλωνίων και όχι αυτόν τον δικό τους, ιθαγενών, έμμετρων αριθμών.

Η παρακμή των Ελληνιστικών βασιλείων και στη συνέχεια της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας, έφερε στο προσκήνιο της ιστορίας τον αραβικό πολιτισμό. Σ’ αυτόν επήλθε βαθμιαία διάχυση του ινδικού αριθμητικού συστήματος, όπως το ελληνικό αλφαβητικό σύστημα. Υπάρχουν ενδείξεις ότι οι Άραβες υιοθέτησαν τα ινδικά ψηφία, με την υποκίνηση μιας μορφής πολιτιστικής αντίστασης που οφειλόταν σε προκατάληψη απέναντι στον ελληνικό πολιτισμό.

Από τον αραβικό πολιτισμό, τα νέα δεκαδικά αριθμητικά ψηφία διαχύθηκαν στους ευρωπαϊκούς πολιτισμούς μεσ’ από την Ισπανία και την Ιταλία με τη διακίνηση των μελετών ή με το εμπόριο. Επίσης μεταδόθηκε και στη Μέση Ανατολή και στη Βόρεια Αφρική.

Ο Άραβας μαθηματικός Αλ Χουαριζεμί, ο πατέρας της σημερινής άλγεβρας, περιγράφει αναλυτικά στα βιβλία του το σύστημα των Ινδών. Έτσι πέρασε στην Ευρώπη με το όνομα Ινδοαραβικό.

Η Ιταλία, κέντρο εμπορίου, αναγνώρισε τα πλεονεκτήματα της αρίθμησης αυτής και με το βιβλό του Λεονάρντο Φιμπονάτσι «Liber Abaci” το 1.200, υπήρξε αποφασιστική η διάδοσή της. Παράλληλα στο Βυζάντιο ο μαθηματικός Μάξιμος Πλανούδης με το βιβλίο του «Ψηφοφορία κατ' Ινδούς» αναφέρει την αριθμογραφία θέσης. Σιγά – σιγά η μεγάλη αυτή μαθηματική κατάκτηση επικράτησε και χρησιμοποιείται σ' όλο τον πολιτισμένο κόσμο.

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένα σύστημα αρίθμησης με βάση το δέκα (10). Όπως συμβαίνει με όλα τα συστήματα αρίθμησης, είναι ένα σύστημα που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος έτσι ώστε να περιγράψει ποσότητες ή πλήθος αντικειμένων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για τη δημιουργία των ονομασιών των ποσοτήτων χρησιμοποιούνται δέκα σύμβολα, τα γνωστά μας 10 ψηφία: 0, 1 , 2 ,3 ,4, 5, 6, 7, 8 και 9. Για το λόγο αυτό λέγεται "δεκαδικό" και για το λόγο αυτό λέμε ότι έχει βάση το δέκα. Έτσι κάθε ποσότητα θα αποκτήσει έναν συμβολισμό σύμφωνα με το δεκαδικό σύστημα, ο οποίος δεν θα είναι τίποτα άλλο από μια ακολουθία από τα προαναφερόμενα δέκα σύμβολα.

Π.χ.: μια ποσότητα από δεκαπέντε χιλιάδες πράγματα συμβολίζεται ως "15.000".

Αν φανταστούμε ότι έχουμε ένα πλήθος από αντικείμενα και θέλουμε το πλήθος αυτό να το αναπαραστήσουμε στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, τότε κάνουμε τα ακόλουθα:

- Ομαδοποιούμε τις μονάδες αντικειμένων σε δεκάδες (μια δεκάδα είναι 10 μονάδες). Αν κάποιες μονάδες οι οποίες δεν φτάνουν για να φτιάξουμε μια δεκάδα, τότε το πλήθος τους είναι το πλήθος μονάδων του αριθμού σε δεκαδική αναπαράσταση. Γράφουμε το αντίστοιχο σύμβολο στη θέση του αριθμού για τις μονάδες.
- Ομαδοποιούμε τις δεκάδες που φτιάχτηκαν σε εκατοντάδες (μια εκατοντάδα είναι 10 δεκάδες). Αν περισσέψουν κάποιες δεκάδες που δεν φτάνουν για να φτιάξουμε εκατοντάδα, τότε το πλήθος τους είναι το πλήθος των δεκάδων του αριθμού σε δεκαδική αναπαράσταση. Γράφουμε το αντίστοιχο σύμβολο στην θέση του αριθμού για τις δεκάδες, δηλαδή μια θέση αριστερά από το σύμβολο που βάλαμε για τις μονάδες κ.ο.κ. μέχρι να ομαδοποιηθούν όλα τα αντικείμενα.

Όπως καταλαβαίνουμε το δεκαδικό σύστημα λέγεται σύστημα θέσης επειδή κάθε ψηφίο έχει διαφορετική αξία σε διαφορετική θέση μέσα στον αριθμό που είναι γραμμένο. Για παράδειγμα: άλλη η αξία του 2 στον αριθμό 26 και άλλη η αξία του 2 στον αριθμό 208.

Η αξία του συστήματος θέσης βρίσκεται στη δυνατότητά του να εκφράζει απεριόριστα μεγάλους ή μικρούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας τα ίδια βασικά ψηφία. Τούτο ήταν σημαντικό για τη βαβυλωνιακή αστρονομία στην κατασκευή πινάκων.

Η επινόηση των συστημάτων θέσης είναι πιθανό να αντιπροσωπεύει μια φυσιολογική πρόοδο στην εξέλιξη των αριθμητικών συστημάτων, που προκλήθηκε από πολιτιστική ένταση, με τη μορφή της ανάγκης συμβολισμού απεριόριστα μεγάλων ή μικρών αριθμών.

Η έκφραση βάση ή ρίζα το 10, σημαίνει ότι σε κάθε αριθμό, κάθε ψηφίο του πολλαπλασιάζεται επί το 10 υψωμένο σε δύναμη που αντιστοιχεί στην θέση του ψηφίου αυτού.

Για παράδειγμα:

Ο αριθμός 5.308 αποτελείται από 8 μονάδες, 0 δεκάδες, 3 εκατοντάδες και 5 χιλιάδες δηλαδή

$5308 = 5 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

Το ίδιο ισχύει και για τους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά χρησιμοποιούμε αρνητικές δυνάμεις του 10.

Για παράδειγμα:

Ο αριθμός 25,375 αποτελείται από 2 δεκάδες, 5 μονάδες, 3 δέκατα, 7 εκατοστά και 5 χιλιοστά, δηλαδή

$25{,}375 = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000} = 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

Έτσι, ένας αριθμός με ακέραιο και δεκαδικό μέρος, έχει ψηφία υψωμένα σε θετικές και αρνητικές δυνάμεις της βάσης 10.

Με την ίδια λογική μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία ενός αριθμού (η οποία είναι ένας αριθμός σε δεκαδικό σύστημα) σε συστήματα με διαφορετική βάση από το 10 (π.χ. στο δυαδικό με βάση το 2, ή το δεκαεξαδικό με βάση το 16). Ο εκάστοτε αριθμός θα μετατραπεί έτσι στον αντίστοιχο στο δεκαδικό σύστημα, που είναι πιο κατανοητό από τους περισσότερους. Ακολουθούν τέτοια παραδείγματα στο δυαδικό σύστημα που ακολουθεί.

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Στο σύστημα αυτό οι αριθμοί γράφονται μόνο με τα ψηφία 0 και 1……

Οι 10 πρώτοι φυσικοί στο δυαδικό σύστημα γράφονται:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Παραδείγματα:

Ο αριθμός 1001010 του δυαδικού συστήματος είναι ο αριθμός 74 του δεκαδικού συστήματος και αυτό το βρίσκουμε ως εξής:

$1001010_2 = 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0 = 64 + 8 + 2 = 74_{10}$.

Ο αριθμός 41 του δεκαδικού συστήματος είναι ο αριθμός 100101 του δυαδικού συστήματος και αυτό το βρίσκουμε ως εξής:

$41 = 2\cdot 20 + \mathbf{1}$,

$20 = 2\cdot10 + \mathbf{0}$,

$10 = 2\cdot5 + \mathbf{0}$,

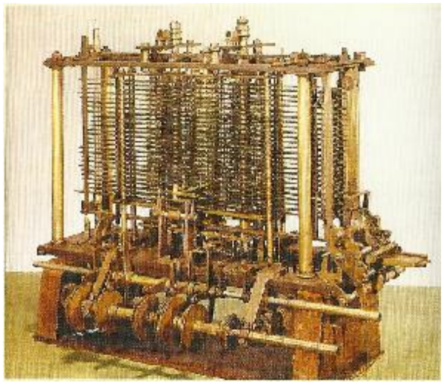
$5 = 2\cdot2 + \mathbf{1}$,

$2 = 2\cdot1 + \mathbf{0}$,

$1 = 2\cdot0 + \mathbf{1}$.

$(41 = 1\cdot2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^5 = 1 + 8 + 32)$.

Στην εικόνα φαίνεται ένας πρόδρομος των σύγχρονων υπολογιστών. Πρόκειται για την Αναλυτική μηχανή του Άγγλου εφευρέτη Charles Babbage (1791 – 1871)



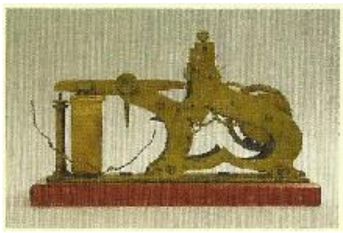
Ο Κώδικας Morse

Ο Samuel F. Morse (1791-1872), δημιουργός του ομώνυμου κώδικα, ξεκίνησε ως ζωγράφος και κατέληξε εφευρέτης για βιοποριστικούς λόγους. Ο Morse αξιοποίησε τη δυνατότητα μετάδοσης ηλεκτρικών σημάτων μικρής και μεγάλης διάρκειας (τελείες και παύλες) σε μεγάλες αποστάσεις μέσω καλωδίων.
Το ενδιαφέρον του Morse για τον τηλέγραφο ξεκίνησε το 1832 και η πρώτη επίδειξη τηλεγραφικού συστήματος έγινε το 1837. Το δημιούργημα του Morse ήταν ένας μηχανισμός αποστολής και λήψης ηλεκτρικών σημάτων καθώς και ένα αλφάβητο, το οποίο σε κάθε ψηφίο αντιστοιχίζει έναν συνδυασμό από τελείες και παύλες.
Το πρώτο μήνυμα στάλθηκε με τηλέγραφο στις 24 Μαΐου 1844, από τη Βαλτιμόρη στην Ουάσιγκτον και έλεγε "Θαυμαστά τα έργα του Κυρίου". Το 1861, η Ανατολική και η Δυτική Ακτή των Η.Π.Α. συνδέθηκαν με τηλεγραφικά καλώδια.

Η εκμάθηση του κώδικα δεν είναι εύκολη. Τα σύμβολά του αποτελούνται από συνδυασμούς δύο μόνο στοιχείων. Αυτά τα στοιχεία είναι παλμοί μικρής και παλμοί μεγάλης διάρκειας. *Οι παλμοί μεγάλης διάρκειας έχουν τριπλάσια διάρκεια από αυτήν των παλμών μικρής διάρκειας.* Στο χαρτί και μόνο για τις ανάγκες της παράστασης του κώδικα συμβολίζουμε τους παλμούς μικρής διάρκειας με . (τελεία) και τους παλμούς μεγάλης διάρκειας με – (παύλα). Αντίστοιχα οι ήχοι που συμβολίζουν είναι ΝΤΙ (.) και ΝΤΑΑ (-).

Ο ΚΩΔΙΚΑΣ MORSE	
ΣΗΜΕΙΑ ΣΤΙΞΗΣ	
Ερωτηματικό [(?) ή (;)]	..--..
Τελεία (.)	.-.-.-
Κόμμα (,)	--..--
Άνω τελεία	-.-.-.
Άνω-κάτω τελεία	---…
Εισαγωγικά (")	.-..-.
Αριστερή Παρένθεση [(]	-.--.
Δεξιά παρένθεση [)]	-.--.-
Κάθετος (/)	-..-.
Λάθος (ακολουθεί το διορθωμένο τμήμα του μηνύματος)	……..
ΑΡΙΘΜΟΙ	
1	.----
2	..---
3	…--
4	….-
5	…..
6	-….
7	--…
8	---..

9	----.
0	----- (ή - αν μεταδίδονται μόνο αριθμοί)
ΕΙΔΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ (PROCEDURAL SIGNS, PROSIGNS)	
Προβείτε	-.-
Έτοιμος, over	-.--.
Αρχή μηνύματος	-...-
Τέλος μηνύματος	.--.
Περιμένετε	.-...
Τέλος εκπομπής	...-.-



Το σύστημα γραφής Braille

Η πρώτη απόπειρα να χρησιμοποιηθεί συνδυασμός κουκίδων (στιγμών) για την αναπαράσταση των χαρακτήρων του αλφαβήτου, στην θέση των ανάγλυφων χαρακτήρων, γίνεται το 1819 από τον Γάλλο λοχαγό του πυροβολικού ΚάρολοΜπαρμπιέ. Το σύστημα θα τελειοποιηθεί από τον τυφλό Γάλλο Louis Braille (Λουδοβίκος Μπράιγ, 1809 – 1852) το 1824, ο οποίος τυφλώθηκε σε ηλικία 3 ετών, μετά από ατύχημα.

Ο Braille θα χρησιμοποιήσει ορθογώνιο πλέγμα 6 ανάγλυφων κουκίδων, η παρουσία ή η απουσία των οποίων στο πλέγμα επιτρέπει τον σχηματισμό 64 διαφορετικών χαρακτήρων. Το σύστημα γραφής του, άρχισε να το επεξεργάζεται από 14 ετών. Διαβάζεται με την αφή αφού είναι το σύστημα γραφής των τυφλών.

Οι ικανοί αναγνώστες κατά κανόνα χρησιμοποιούν και τα δύο χέρια. Η λειτουργία των δύο χεριών είναι εναλλασσόμενη, το ένα αντικαθιστά το άλλο, συνήθως στη μέση της γραμμής ενός κειμένου. Καθώς το ένα λαμβάνει τη λεκτική πληροφόρηση του κειμένου, το άλλο εστιάζει στις χωρικές λειτουργίες. Ο αριστερός δείκτης συνήθως δεν αρχίζει να κινείται προς μια καινούργια γραμμή προτού ο δεξιός δείκτης να έχει ολοκληρώσει το τελευταίο γράμμα της προηγούμενης γραμμής.

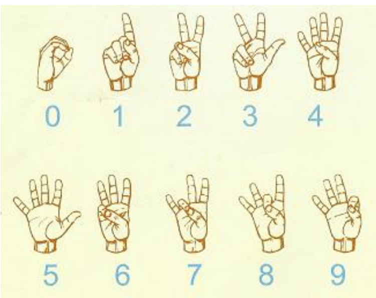
Το 1958 το υπουργείο Παιδείας καθιέρωσε το εξάστιγμο αλφάβητο Braille ως το επίσημο αλφάβητο για την εκπαίδευση των Ελλήνων τυφλών. Στο Φάρο Τυφλών της Ελλάδος, υλοποιείται εκπαιδευτικό πρόγραμμα με την μορφή σεμιναρίων, για την εκμάθηση της γραφής Braille. Το πρόγραμμα απευθύνεται:

α) Σε άτομα με προβλήματα όρασης, που θέλουν να μάθουν Braille

β) Σε εκπαιδευτικούς που θα ήθελαν να πιστοποιήσουν τη γνώση τους στη γραφή Braille.

Οι αριθμοί στη νοηματική

Οι νοηματικές γλώσσες αποτελούν αυτόνομα συστήματα φυσικών γλωσσών, των οποίων το λεξιλόγιο, η μορφολογία και η σύνταξη, παίρνουν υπόσταση και λειτουργούν στον τρισδιάστατο χώρο, όπου δηλώνονται όλες οι γραμματικές σχέσεις, τόσο στο επίπεδο της παραγωγικής και κλιτικής μορφολογίας, όσο και στα επίπεδα των συντακτικών δομών και της δήλωσης σημασιολογικών χαρακτηριστικών και σχέσεων (Stokoe, 1978: Stokoe & Kuschel, 1978). Το κοινό στοιχείο όλων των νοηματικών γλωσσών είναι η γεωμετρική οργάνωση του γλωσσικού μηνύματος στον τρισδιάστατο χώρο με την αξιοποίηση των εκφραστικών δυνατοτήτων που παρέχει η κίνηση των χεριών, η στάση και η κίνηση του σώματος, η χρήση του βλέμματος και η έκφραση του προσώπου. Ο χώρος παραγωγής του νοήματος ή χώρος νοηματισμού είναι εργονομικά καθορισμένος και περιλαμβάνει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από την κορυφή της κεφαλής ως τον άνω κορμό και περίπου 20 – 30 εκατοστά στα πλάγια των μπράτσων πάντα στο εμπρός μέρος του σώματος.



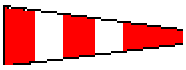
Η Ελληνική νοηματική γλώσσα (ΕΝΓ) είναι η γλώσσα της κοινότητας των Κωφών στην Ελλάδα, η οποία, αποτελεί αυτόνομο σύστημα που δεν απεικονίζει ούτε προέρχεται από την ομιλούμενη ελληνική γλώσσα. Αντίθετα, είναι μια οπτικο-κινησιακή φυσική γλώσσα η οποία είναι οργανωμένη σε σύστημα κανόνων που χρησιμοποιεί σύμβολα για να αναπαραστήσει έννοιες.

Ναυτικές Σημαίες

Οι ακόλουθες σημαίες είναι διεθνή σήματα που χρησιμοποιούνται σε σκάφη εν πλω. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποσταλούν σύντομα μηνύματα, ή συχνότερα, χρησιμοποιούμενα χωριστά ή σε συνδυασμό έχουν ειδικές έννοιες. Δεμένες με σπάγκο και κρεμασμένες σε τόξο από την πρύμνη στα ξάρτια χρησιμοποιούνται για να στολίσουν το σκάφος για εθιμοτυπικές και εορταστικές περιπτώσεις.

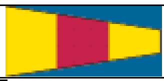
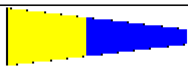
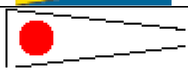
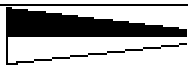
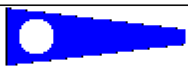
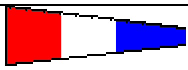
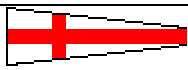
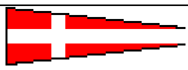
Σημαία **Διεθνής ερμηνεία**

Η σημαία απάντησης χρησιμοποιείται ως δεκαδικό σημείο κατά την αποστολή αριθμητικών στοιχείων.
Όταν βρίσκεται στην κορυφή του ιστού, το λαμβάνον σκάφος δείχνει ότι καταλαβαίνει το σήμα. Στο τέλος του σήματος δείχνει ότι το μήνυμα είναι πλήρες.



Στη μέση του ιστού, ανυψώνεται από το λαμβάνον σκάφος καθώς διαβιβάζονται τα μηνύματα από το σκάφος που εκπέμπει.

Αριθμητικές σημαίες

	0		5
	1		6
	2		7
	3		8
	4		9

Πηγές:

- «Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών» του Raymond L. Wilder, The Open University (το Ανοικτό Πανεπιστήμιο της Αγγλίας).
- «Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους» , αφίσα 2011.
- Περιοδικά «Ευκλείδης Α'» της Ελληνικής μαθηματικής εταιρείας.
- Διαδίκτυο……